



**स्थिति विज्ञान तथा गति विज्ञान**  
( Statics and Dynamics )

भाग १

स्थिति विज्ञान



# स्थिति विज्ञान

तथा

# गति विज्ञान

रचयिता

एस० एल० लोनी

---

भाग १

स्थिति विज्ञान

---

अनुवादक

आनन्द स्वरूप सिन्हा, एम० ए०  
अध्यक्ष, गणित विभाग तथा वाइस-प्रिन्सिपल.  
डी० ए० बी० कॉलेज, देहरादून



मैकमिलन एण्ड कम्पनी, लिमिटेड  
२६४, बहूबाजार स्ट्रीट, कलकत्ता  
१६६०

MACMILLAN AND COMPANY LIMITED  
LONDON BOMBAY CALCUTTA MADRAS MELBOURNE  
THE MACMILLAN COMPANY OF CANADA LIMITED  
TORONTO  
ST MARTIN'S PRESS INC  
NEW YORK

*This book is copyright in all countries which  
are signatories to the Berne Convention.*

First Edition 1953  
Revised Edition 1960

MADE AND PRINTED IN INDIA BY BRUCE PAI  
S. S. S. D. PRESS, 95 B, CHITTARANJAN AVENUE,

## पहले भाग का प्राक्कथन

इस पुस्तक की रचना करने में मेरा लक्ष्य यह रहा है कि जूनियर विद्यार्थियों के लिये स्थिति विज्ञान पर एक उचित पाठ्य पुस्तक हो।

पुस्तक में उदाहरण बड़ी संख्या में हैं, जिनमें अधिकतर—घर्षण के अध्याय के अन्त में और पुस्तक के अन्त में विविध उदाहरणमाला में दिये गये उदाहरणों को छोड़कर—सब सरल हैं।

मैंने जहाँ तक सम्भव हुआ है पुस्तक को पूर्ण बनाने का प्रयत्न किया है, तथापि विद्यार्थी को चाहिये कि प्रथम अध्ययन में पुष्पांकित भागों को छोड़ दे।

मैं अपने मित्र सिडने संसेकम कॉलेज, केम्ब्रिज के लेक्चरर श्री एच० मी० रोबसन, एम० ए० का आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक के प्रूफों को पढ़ कर तथा बहुमूल्य सुझाव देकर मेरी सहायता की है।

यदि किन्हीं अशुद्धियों की मही अथवा सुधार के लिये सुझाव दिये जायेंगे तो मैं उन्हें कृतज्ञता पूर्वक स्वीकार करूँगा।

बारनीस, एस० डब्लू०

दिसम्बर १८९०

एस० एल० लोनी

## दशम संस्करण का प्राक्कथन

पुस्तक में कुछ परिवर्तन किया गया है, और मुझे आशा है कि इस संस्करण में पहले से कुछ उन्नति हुई है। लेखा-चित्रीय हल कुछ पहले रख दिये गये हैं और लेखाचित्रीय रीतियों का समस्त पुस्तक में अधिक प्रयोग किया गया है। प्रयोगात्मक भाग अधिक बढ़ा दिया गया है।

कर्म के अन्वय में कुछ सहाय्य दे दी गई है और कर्म के सिद्धान्त पर अधिक जोर दाना गया है।

वैश्लेषिक प्रमाणों को अन्तिम अध्याय में रख दिया गया है और वैकल्पिक प्रमाण देने में जिनमें चल राशि कलन का प्रयोग होता है मैंने सकोच नहीं किया।

इस पुस्तक के दस नये चित्रों के लिये मैं डा० आर० टी० ग्लेज़ब्रुक की उदारता का बहुत आभारी हूँ जिन्होंने मुझे अपनी स्थिति विज्ञान की पुस्तक के ग्लाइडों के प्रयोग करने की आज्ञा दे दी। इनमें से अधिकांश चित्रों में यह विशेष गुण है कि वे केम्ब्रिज की कैम्बेन्डिश प्रयोगशाला में प्रचलित यथार्थ यन्त्रों से खींचे गये हैं।

रॉयल हॉलोवे कॉलेज,  
इंगलफील्ड, सरे।  
जुलाई, १९०६

एस० एल० लोनी

## अनुवादक का वक्तव्य

भारत के स्वतंत्र होने पर ज्ञान-विज्ञान और शिक्षा के प्रसार के लिये आज अंग्रेजी तथा अन्य भाषाओं के ग्रन्थों के राष्ट्रभाषा, हिन्दी, में अनुवाद की आवश्यकता आ पड़ी है। शिक्षा-संस्थाओं तथा विद्यालयों में हिन्दी-माध्यम द्वारा तभी शिक्षा दी जा सकती है जब विद्यार्थियों की आवश्यकता के अनुसार पर्याप्त सख्या में ग्रन्थों के हिन्दी अनुवाद उपस्थित किये जायें। इसी अभाव की पूर्ति के लिये एस० एल० लोनी लिखित स्थिति विज्ञान का अनुवाद उपस्थित किया जा रहा है। अनुवाद के इस प्रथम संस्करण में अक्षर तथा अंक अंग्रेजी में ही रखे गये हैं क्योंकि यह परिवर्तन काल है और इन समय ऐसा ही उपयुक्त जान पड़ता है। जहाँ तक सम्भव हो सका है पारिभाषिक शब्द अन्तर्राष्ट्रीय ही रखे गये हैं। हाई स्कूल की कक्षाओं तक अब तक शिक्षा का माध्यम हिन्दी ही रहने के कारण रेखागणित तथा बीजगणित के पारिभाषिक शब्दों से विद्यार्थियों को पूर्ण परिचय है इसलिये

इन्हीं हिन्दी परिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है और इनके अतिरिक्त जो नए पारिभाषिक शब्द पहली बार प्रयुक्त किये गये हैं उनके अंग्रेजी भाषान्तर शब्द कोष्ठ में साथ ही साथ दिये गये हैं। आशा है प्रस्तुत अनुवाद विद्यार्थियों के लिये लाभदायक सिद्ध होगा।

अनुवाद करने में ऐसे अनेक शब्द आये हैं जिनके हिन्दी खोजने में बड़ी कठिनाइयाँ पड़ी हैं। इस कार्य में मुझे अपने मित्र श्री हर नारायण मिश्र तथा काशी नागरी-प्रचारिणी सभा द्वारा हिन्दी वैज्ञानिक कोष से विशेष सहायता मिली है। इसके हेतु मैं इनको हार्दिक धन्यवाद देता हूँ।

देहरादून

आनन्द स्वरूप सिन्हा

सितम्बर ३१, १९५३





# विषय-सूची

## स्थिति विज्ञान

अध्याय	विषय	पृष्ठ
१	भूमिका .. .. .	१
२	बल-संयोजन तथा बल-विस्तरेषण . . .	९
३	बल-संयोजन तथा बल-विस्तरेषण (प्रमशः) ...	३५
४	समानान्तर बल . . .	६०
५	पूर्ण .. .. .	७४
६	बल युग्म ... .. .	९३
७	एक घरातल में तीन बलों से कार्य किये जाने हुये दृढ़ पिंड का समतुलन ... .. .	१०३
८	एक घरातल में बलों से कार्य किये जाने हुये दृढ़ पिंड के समतुलन के मापान्तर नियम ... .. .	१२१
९	मुख्य-केन्द्र .. .. . सम-विभुजीय पटल, चतुष्फलक, इत्यादि का मुख्य-केन्द्र ... .. .	१५० १५४
	मुख्य-केन्द्र निकालने के व्यापक सूत्र ... .. .	१६१
१०	मुख्य-केन्द्र (प्रमशः) ... .. . मुख्य-केन्द्र के गुण . . .	१८६
	स्थायी तथा अस्थायी संक्षिप्ति .. .. .	१९०
११	रश्मि .. .. .	२०१
१२	समीत .. .. . (क) सीधर .. .. . (ख) धिरगिरा तथा धिरगिरां की भेदिका .. .. . (ग) ज्ञाता धरातल .. .. . (घ) रश्मि और धरी .. .. .	२१० २१३ २२० २३८ २६३

## अध्याय

## विषय

पृष्ठ

(ड) वेस्टन की अन्तरीय घिरनी ..

२५१

(च) साधारण तुला ..

२५५

(छ) विषम-भुज तुला (स्टील-यार्ड) ..

२६४

(ज) पेच (स्कू) ..

२७२

१३ घर्पण ..

२८०

घर्पण के नियम ..

२८१

दृष्ट आनत समतल पर समतुलन ..

२९०

मशीनों की दक्षता ..

२९७

बिना घर्पण की मशीन ..

२९९

१४ घर्पण पर कुछ उदाहरण (क्रमशः) ..

३१२

१५ विविध ..

३३२

चिकने कब्जे ..

३३२

संयोग बहुभुज ...

३३८

स्थिति-स्थापक तारों के तनाव ...

३४२

लेखा-चित्रीय रचनाये ..

३४६

१६ कुछ अधिक साध्य ...

३६०

बल-समानान्तर-चतुर्भुज का लौकिक प्रमाण ...

३६४

समवृत्तीय चाप, द्वित्रिज्य, तथा वृत्ताक्ष का गुरुत्व-केन्द्र ...

३६८

गोल के कटिवन्ध का गुरुत्व-केन्द्र ..

३७०

खोखले तथा ठोस गोलक के गुरुत्व-केन्द्र ..

३७२

कात्पनिक कर्म ...

३७७

रोवरवेल की तुला ..

३८१

सरल विविध उदाहरणमाला ..

३८४

कठिन विविध उदाहरणमाला ..

४०३

उत्तरमाला ..

४०३

## पारिभाषिक शब्दों की सूची

Abscissa	..	सूज
Action	..	क्रिया
Adjacent	...	सलग्न
Admissible	..	ग्राह्य
Analytical method	..	वैश्लेषिक विधि
Angular point	...	कोणीय बिन्दु
Apparatus	...	यन्त्र
Apparent	...	स्पष्ट ; प्रतीपमान
Applied	...	व्यावहारिक
Arbitrary	...	अनियत
Arc	...	चाप
Arm	...	भुजा
Attraction	...	आकर्षण
Axis	...	अक्ष
Balance	...	तुला
Balanced	...	समतुलित
Balance, spring	...	स्प्रिंग तुला ; कमानीदार कांटा
Bar	...	दंड
Beam	...	छड़ ; कड़ी
Block	...	गुटका
Body	...	पिंड
Bounding surface	...	सीमान्त पृष्ठ
Calculus, Integral	...	चलराशि कलन
Centre of gravity	...	गुरुत्व-केन्द्र
Centre of Inertia	...	जड़त्व-केन्द्र

Centre of mass	...	...	जाइस-केन्द्र
Centroid	..	...	मध्य केन्द्र, केन्द्र
Chord	...	...	चाप
Circular	.	..	वृत्ताकार ; वृत्तीय
Combination	...	...	संयोज
Commensurable	...	...	नियमित
Common balance	...	...	साधारण तुला
Component force	...	...	अवयव बल
Compound the forces	..	...	बल संयोजन करना
Concave	...	...	नतोदर
Concavity	...	...	नतोदरत्व
Cone	...	...	शंकु
Conical	...	...	शंकुवाकार
Connected rigidly	...	...	दृढ़ता से जुड़े हुए ; सम्बद्ध
Consecutive	...	...	क्रमगत
Constant (adj.)	...	...	स्थायी
Constrained body	...	...	निर्बंधित पिंड
Construction, graphical			रेखा-चित्रण रचना
Contact	..	..	स्पर्श
Continuous	..	...	अविच्छिन्न, लगातार
Converge	...	...	संभूत होना
Converse	...	...	विलोम
Conversely	..	...	विलोमतः
Convex	..	...	उन्नतोदर
Convexity	...	...	उन्नतोदरत्व
Coplanar forces	...	...	समतलीय बल
Corollary	...	...	व्युत्पन्न-माध्य

Couple	...	...	बलजुगल
Crane	...	...	क्रेन
Cross-section	..	...	अनुप्रस्थ परिच्छेद
Curved surface	...	..	वक्र-पृष्ठ
Cylinder	...	.	बेलन
Cylindrical		...	बेलनाकार
Density	..	..	घनत्व
Diagonal	.		विकर्ण
Diagonal Scale	..	..	कर्ण मापनी
Disc	...	..	मडल
Displacement	..	..	स्थानान्तर
Diverge	...	.	अपमृत होना
Dotted line	...	..	विन्दुमय रेखा
Dynamical	.	..	गत्यात्मक
Dynamics	...	.	गति विज्ञान
Edge	...	...	कोर
Effective force	..	...	फलवत् बल
Efficiency	...	...	दक्षता
Effort	...	..	प्रयत्न
Elastic	...	...	स्थिति-स्थापक
Elastic strings	...	..	स्थिति-स्थापक तार
Elasticity, modulus of			स्थिति-स्थापन-मापक
Element	...	...	अल्पांश, छोटा भाग
Eliminate	...	..	लुप्त करना
Enunciation	...	...	प्रतिज्ञा
Equilibrium	...	...	समतुलन
Equilibrium. neutral	...		उदासीन संस्थिति

Equilibrium, stable	..	स्थायी संस्थिति
Equilibrium, unstable		अस्थायी संस्थिति
Equilibrium, to be in	...	मम तुलित होना
Equivalent	. ..	तुल्य
Escribed circle	...	बाह्य वृत्त
Experiment	..	प्रयोग
Experimental law	..	प्रयोगात्मक नियम
Experimental proof	.	प्रयोगात्मक प्रमाण
Extensible	..	तन्य
Extension	.	विस्तार
External forces	.	बाह्य बल
Fixed	..	नियत
Force	..	बल
Force of compression	..	सपीडन बल
Forces, composition of		बल संयोजन
Forces, like parallel	.	सम समानान्तर बल
Forces, parallelogram of		बल समानान्तर चतुर्भुज
Forces, polygon of	.	बल बहुभुज
Forces, triangle of	...	बल त्रिभुज
Forces, unlike parallel		विवर्त समानान्तर बल
Free end	...	मुक्त सिरा
Freely jointed	...	मुक्त संयुक्त
Friction	...	घर्षण
Frictional	...	घर्षणीय
Friction, angle of	...	घर्षण-कोण
Friction, co-efficient of		घर्षण-गुणक
Friction, cone of	...	घर्षण-शंकु

Friction, limiting	...	सीमान्त घर्षण
Frustum of a cone	...	छिन्न-शंकु
Fulcrum	...	बालम्ब
Funicular polygon	...	सयोग बहुभुज
General	...	सामान्य ; साधारण
General formula	.	व्यापक सूत्र
Generalised	...	ध्यात्तिकृत
Generating line	...	जनक-रेखा
Geometrical progression		गुणोत्तर श्रेणी
Geometry, analytical	..	बैश्लेषिक ज्यामिति
Graduated scale	...	अशाकित मापनी
Grain	...	श्रेण
Graphically	..	लेखा-चित्र द्वारा
Graphical representation		लेखा-चित्रोप प्रति-दर्शन
Gravity	...	गुरुत्व
Gravity, centre of	...	गुरुत्व-केन्द्र
Harmonically divided	...	हरात्मकत विभाजित
Harmonical progression		हरात्मक श्रेणी
Hexagon	...	षडभुज
Hinge	...	कङ्का
Homogeneous body	...	समांशिक पिंड
Hook	...	जाँकड़ा
Hoop	...	छल्ला
Horizontal	...	क्षैतिज
Hypotenuse	...	कर्ण
Hypothesis	...	कल्पना
Illustration	...	उदाहरण



Inclined plane ..	...	आनत तल; आनत धरातल
Incommensurable ..	...	अनियमित
Inextensible ..	..	अतन्य
Infinitesimal ..	...	अत्यल्प
Initial position ..	..	आदि स्थान
Inscribed circle ..	..	अन्त वृत्त
Intercepted ..	..	अन्त. खंडित
Intersection ..	...	छेदन
Invariable ..	...	अपरिणम्य
Inversely proportional		उत्क्रमानुपाती
Inverse ratio ..	...	व्युत्क्रम निष्पत्ति, व्युत्क्रमानुपात
Investigation ..	...	अन्वेषण
Irregular ..	...	विषम
Jointed freely ..	..	मुक्त संयुक्त
Kinetics ..	...	गत्यात्मक विज्ञान
Lamina ..	...	पटल
Lever ..	...	लीवर
Line of greatest slope ..	...	महत्तम ढाल-रेखा
Load ..	...	भार
Logarithm ..	..	लघुगणक
Loop ..	..	पाश
Machine ..	...	मशीन
Magnitude ..	...	परिमाण
Mass (quantity) ..	...	मात्रा
Material bodies ..	...	पार्थिव पदार्थ
Matter ..	...	द्रव्य
Mean ..	...	मध्यमान

Measure	...	...	माप
Mechanical advantage			यांत्रिक लाभ
Mechanics	...	...	यन्त्र-विज्ञान
Moment	...	...	घूर्ण
Motion	...	...	गति
Motion, uniform		..	समान गति
Negligible	...	.	उपेक्षणीय
Neutralise	...	..	निराकरण
Notation	...	...	संकेत
Obtuse angle	...	...	अधिक कोण
Octagon	...	...	अष्ट भुज
Opposite force	...	...	विरुद्ध बल
Original	...	...	मौलिक
Orthocentre	...	...	लाम्बिक केन्द्र
Parallelepiped	...	...	समानान्तर षडफलक
Parallelepiped, rectangular			समकोणीय समानान्तर षडफलक
Particle	...	...	कण
Path	...	...	मार्ग
Pentagon	...	...	पञ्चभुज
Physical meaning		...	भौतिक अर्थ
Pivot	..	...	चूल
Plot	...	...	अंकित करना
Plumb-line	...	...	गुनिया
Plummet	...	...	गुनिया
Point of application		...	प्रयोग-बिन्दु
Pointer	...	..	सूचक
Polygon, funicular		...	संयोग बहुभुज

Power	..	...	नामार्थ्य
Power arm	..	..	शक्ति भुजा
Power, horse	...	...	अश्व-नामार्थ्य
Practical	...	...	क्रियात्मक
Pressure	.	...	दबाव
Principle of work	...	...	कर्म का सिद्धान्त
Prism	..	...	समपाद्वर्ग
Prism, triangular	..	..	त्रिकोणाकार समपाद्वर्ग
Progression, arithmetical			ममान्तर श्रेणी
Proof	..	...	प्रमाण
Proportion	...	...	अनुपात
Pulley	...	.	घिरनी
Pulley, differential	..		अन्तरीय घिरनी
Pulleys, first system of	..		घिरनियों की प्रथम श्रेणी
Pulleys, second system of			घिरनियों की द्वितीय श्रेणी
Pulleys, third system of	...		घिरनियों की तृतीय श्रेणी
Pyramid	..	..	मूची-स्तम्भ
Quantity	..	...	परिमाण; राशि
Radiate	..	..	विकीर्ण करना
Reaction	...	...	प्रतिबल, प्रति-क्रिया
Reaction, normal	...	...	अभिलम्ब प्रतिबल
Real	...	...	वास्तविक
Reciprocal	...	...	व्युत्क्रम
Reduce	...	...	परिणत करना
Re-entrant angle	..	...	अन्नः प्रविष्ट कोण
Relative	...	...	आपेक्षिक
Repel	..	...	प्रतिमाखित करना

Replace	...	...	स्थानापन्न होना
Representation	...	...	प्रतिदर्शन
Resistance	...	...	प्रतिरोध
Resolve	...	..	विश्लिष्ट करना
Resolved parts	...	..	विश्लिष्ट भाग
Resolution of forces	...	...	बल-विश्लेषण
Rest	..	...	निश्चलता
Result	...	.	परिणाम
Resultant force	.	..	लब्ध बल, परिणामी बल
Rhombus	...	...	सम चतुर्भुज
Right cone	..	..	मम शकु
Rigid	...	...	दृढ
Rod	..	...	दंड
Rotational (motion)	...	...	भ्रमण गति
Rotation, axis of	...	...	परिभ्रमणाक्ष
Rough	...	...	रूक्ष
Scale pan	...	...	पलड़ा
Screw	...	...	पेंच ; स्क्रू
Screw, differential	..	...	अन्तरीय पेंच
Screw, pitch of the	...	...	पेंच का पिच
Screw, thread of the	...	...	पेंच की चूड़ी
Section	...	...	परिच्छेद
Sector of a circle	...	...	वृत्तकला, द्वैत्रिज्य
Sensitive balance	...	...	सूक्ष्मग्राही तुला
Sensitiveness	...	...	सूक्ष्मग्राह्यता
Shell	..	...	कवच
Similar	...	...	ममरूप

Socket	.	...	आधार ; प्रकोष्ठ
Solid	...	..	पिंड; ठोस
Sphere		...	गोलक, गोल
Spherical		..	गोलीय
Spherical sector			गोलक का द्वैत्रिज्य
Spiral	.	...	सर्पिल
Spiral spring	.		सर्पिलाकार कमान
Squared paper			वर्गाङ्कित पत्र
Stable	.	.	स्थायी
Statical	.		स्थिति सम्बन्धी
Statics			स्थिति विज्ञान
Steam			वाष्प
Steelyard	..	.	विषम-भुज तुला
Strain	..	..	विक्रिया
Stress	...	.	दबाव
Sub-division	..	.	प्रविभाजन
Successive	.		उत्तरोत्तर; क्रमागत
Successively	.	..	उत्तरोत्तर
Support	.	..	आलम्बन
Surface		.	पृष्ठ; तल
Surface, curved	.	...	वक्र-पृष्ठ
Suspension, point of	.		आलम्बन-बिन्दु
Symmetrical		..	सममित
Symmetry	.	...	सममिति
System	.	...	समुदाय
System of forces	..	...	बल-समुदाय
Tension	..	...	तनाव

Tetrahedron	..	...	चतुष्फलक
Theoretical	...	...	सैद्धान्तिक
Theory	...	...	सिद्धान्त
Thrust	..	...	दबाव
Torque	..	..	घूर्णक
Transmissibility	...	...	संचारकत्व
Transmission	...	...	संचारण ; प्रेषण
Trapezoid	...	...	समलम्ब
Unequal	...	...	विषम
Uniform	..	...	सम, इकसार
Unknown	...	..	अज्ञात , अव्यक्त
Unlimited	...	..	असीम
Unstable	...	...	अस्थायी
Variation	..	...	परिणमन
Velocity	...	...	वेग
Vertical	..	...	ऊर्ध्वाधर
Volume	...	...	आयतन
Wedge	...	...	टंक
Weighing, double		...	द्विक तोलन
Weight	...	...	भार
Wheel and axle	...	...	चक्र धुरी
Wheel and axle, differential			अन्तरीय चक्र और धुरी
Work	...	...	कर्म
Work, principle of		...	कर्म का सिद्धान्त
Work, virtual	...	...	काल्पनिक कर्म
Zone of the sphere		...	गोलक का कटिबन्ध



# स्थिति विज्ञान

## अध्याय १

### भूमिका

१-द्रव्य (Matter) के उस अंश को जो प्रत्येक दिशा में सीमित है पिंड (Body) कहते हैं।

२-बल (Force) उसे कहते हैं जो किसी पिंड की निश्चल स्थिति तथा समान गति को बदलता है अथवा बदलने में प्रवृत्त होता है।

३-निश्चलता (Rest). कोई पिंड निश्चल स्थिति में उस समय कहलाता है जब वह चारों ओर की वस्तुओं के सापेक्ष अपने स्थान को नहीं बदलता।

४-स्थिति विज्ञान (Statics) वह विज्ञान है जो निश्चल पिंडों पर बलों की क्रिया के सम्बन्ध में विचार करता है, जब कि वे इस प्रकार के होते हैं कि पिंड निश्चल रहते हैं।

उस विज्ञान को जो गतिशील पिंडों पर बलों की क्रिया के सम्बन्ध में विचार करता है गति विज्ञान (Dynamics) कहते हैं।

पारिभाषिक-शब्दावली और आधुनिक परिपाटी में उस विज्ञान को जो पिंडों पर बलों की क्रिया के सम्बन्ध में विचार करता है गति विज्ञान (Dynamics) कहते हैं, और इसके दो उपविभाग हैं - स्थिति विज्ञान (Statics) जो निश्चल स्थिति में पिंडों पर, और गत्यात्मक विज्ञान (Kinetics), जो गतिशील पिंडों पर बलों की क्रियाओं के सम्बन्ध में विचार करते हैं।

५-द्रव के उस अंश को, जो आकार में अत्यन्त छोटा है अथवा जो हमारे अनुगंधान के लिये इतना छोटा है कि उसके भिन्न भिन्न भागों के बीच की दूरियाँ नगण्य मानी जा सकती हैं, कण (Particle) कहते हैं।



## स्थिति विज्ञान

कोई पिंड बहु संख्या में कणों के अत्यन्त छोटे छोटे अंशों का संग्रह माना जा सकता है।

६-दृढ़ पिंड (Rigid Body) वह पिंड है जिसके भिन्न भिन्न भाग एक दूसरे के सापेक्ष मदा अपरिवर्तनीय स्थिति में रहते हैं।

कण की धारणा के समान यह धारणा भी काल्पनिक है। प्रकृति में कोई पिंड ऐसा नहीं है जिसे पूर्णतया दृढ़ कहा जा सके। प्रत्येक पिंड जब उस पर बल का प्रयोग किया जाता है कुछ खिंच जाता है चाहे थोड़ा ही क्यों न हो। यदि लकड़ी के किसी दंड (rod) के एक सिरे को दृढ़ता से गाड़ दिया जाय और दूसरे सिरे को खींचा जाय तो लकड़ी थोड़ी सी खिंच जाती है; यदि दंड लोहे का हो तो खिंचाव बहुत कम होता है।

सरलता के लिये हम यह मान लेंगे कि पिंड जिन पर हम विचार करेंगे पूरे दृढ़ है।

७-समतुल्य बल (Equal Forces). जब किसी कण पर दो बलों का प्रयोग विपरीत दिशाओं में किया जाय और कण निश्चल रहे, तो उन्हें समतुल्य अथवा बराबर बल कहते हैं।

८-मात्रा (Mass). पिंड में द्रव्य के परिमाण को मात्रा कहते हैं। इंग्लैंड में मात्रा की इकाई को एक पाउंड (pound) माना है, जो इक्वचेकर आफिस (Exchequer Office) में रखे हुये प्लैटिनम के एक टुकड़े की मात्रा के बराबर है।

अतः किसी पिंड की मात्रा दो, तीन, चार,....पाउंड कही जाती है जब उसमें उस प्लैटिनम के टुकड़े का दो, तीन, चार,.. गुना द्रव्य होता है।

फ्रांस तथा अन्य विदेशों में मात्रा की इकाई को एक ग्राम (gramme) माना है, जो लगभग 15.432 ग्रेन (grains) के बराबर है। व्यावहारिक इकाई एक किलोग्राम (1000 ग्राम) है, जो लगभग 2.2046 पाउंड के बराबर है।

९-भार (Weight). भार से हरएक परिचित है। हम सब जानते

है कि किसी पिंड को पृथ्वी पर गिरने में रोकने के लिये कुछ परिश्रम की आवश्यकता होती है। पृथ्वी हर एक पिंड को अपनी ओर उस बल से आकर्षित करती है जो, जैसा कि हम गति विज्ञान में देखेंगे, पिंड की मात्रा के अनुपातीय है।

वह बल, जिससे पृथ्वी किसी पिंड को अपनी ओर आकर्षित करती है, पिंड का भार कहलाता है।

१०—बल की माप। हम स्थिति विज्ञान में बल की इकाई को एक पौंड मानेंगे। इसलिये बल की इकाई उस बल के बराबर है जो एक पौंड की वस्तु को रोक लटकी हुई मात्रा को ठीक थाम सकता है।

हम गति विज्ञान में दिखलायेंगे कि एक पौंड का भार पृथ्वी के भिन्न भिन्न स्थानों पर भिन्न भिन्न होता है।

स्थिति विज्ञान में हमें पृथ्वी के भिन्न भिन्न स्थानों पर बलों की तुलना नहीं करनी होगी, अतः एक पौंड के भार का यह परिवर्तन व्यावहारिक रूप से आवश्यक नहीं है; इसलिये हम उस परिवर्तन को छोड़ देंगे और एक पौंड के भार को स्थिर मानेंगे।

११—“एक पौंड के भार” का सक्षिप्त. स्थिति विज्ञान में, “एक पौंड” है। इसलिये विद्यार्थी को समझ लेना चाहिये कि “10 पौंड के बल” से तात्पर्य उस “बल से है जिसका भार 10 पौंड” है।

१२—बलों को सरल रेखाओं से प्रदर्शित किया जाता है। बल पूर्णतः उस समय मालूम हो जाता है जब हमें (१) उसका परिमाण, (२) उसकी दिशा, और (३) उसका प्रयोग बिन्दु अर्थात् पिंड का वह बिन्दु जहाँ पर बल का प्रयोग किया गया है, मालूम हों।

अतः हम किसी बल को उसके प्रयोग बिन्दु से खींची गई एक सरल रेखा द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं, क्योंकि किसी सरल रेखा में परिमाण और दिशा दोनों ही होती हैं।

उदाहरणार्थ : मान लो सरल रेखा  $OA$  उस बल को प्रदर्शित करती है जो बिन्दु  $O$  पर लगाया गया है और जिसका भार 10 पौंड है,

तो 5 पौंड भार का उभी दिशा में लगाया गया बल  $OB$  से प्रदर्शित होगा, जहाँ पर  $B$ ,  $OA$  की दूरी को समविभाजित करता है, और 20 पौंड भार का बल  $OC$  से प्रदर्शित होगा जहाँ पर  $OA$  इस प्रकार बढ़ाई गई है कि  $AC$ ,  $OA$  के बराबर है।

बल के लगाये जाने की दिशा को बहुधा बाण के फल के चिन्ह से प्रदर्शित करने हैं।



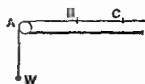
१३-बल के उपविभाग। जब किसी बल का किसी पिंड पर प्रयोग किया जाता है तो उसके तीन भिन्न रूप होते हैं: (१) आकर्षक बल (attraction), (२) वितति बल अथवा तनाव (tension), और (३) प्रतिक्रिया (reaction)।

१४-आकर्षक बल। आकर्षक बल वह बल है जो एक पिंड दूसरे पर, बिना किसी दृश्यमान मध्य के और बिना एक दूसरे को अनिवार्य रूप से स्पर्श किये ही, प्रयोग करता है। इस प्रकार का एक मात्र उदाहरण, जिसका हम इस पुस्तक में वर्णन करेंगे, वह बल है जिससे पृथ्वी किसी पिंड को अपनी ओर आकर्षित करती है। यह आकर्षक बल (धारा ९) उस पिंड का भार कहलाता है।

१५-तनाव। यदि हम डोरी के एक सिरे को पिंड के किसी बिन्दु पर बाँध दें और दूसरे सिरे को खींचें तो हम पिंड पर बल का प्रयोग करते हैं; ऐसे बल को, जो किसी डोरी अथवा दण्ड के द्वारा लगाया जाता है, तनाव कहते हैं।

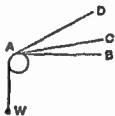
यदि डोरी हल्की है (अर्थात् उसका भार इतना कम है कि उसे नगण्य माना जा सकता है) तो जो बल डोरी द्वारा लगाया जाता है वह सारी लम्बाई में वही रहता है।

उदाहरणार्थ, यदि भार  $W$  एक हल्की डोरी द्वारा, जो एक मेज के चिकने सिरे के ऊपर होकर गुजरती है, धामा जाय तो मालूम किया गया है कि चाहे डोरी के किसी भी बिन्दु  $A, B$ , अथवा  $C$  पर बल का प्रयोग क्यों न किया जाय, बल वही रहता है।



चूँकि भार को धामने के लिये  $A$  पर लगाया गया बल प्रत्येक स्थिति में वही रहता है, इसलिये यह स्पष्ट है कि डोरी के किसी भी बिन्दु पर तनाव का प्रयोग क्यों न किया जाय परिणाम में कोई अन्तर नहीं होता और इसलिये डोरी की सारी लम्बाई में तनाव वही रहता है।

पुनः, यदि भार  $W$ , एक हल्की डोरी द्वारा जो किसी चिकनी खूँटी  $A$  के ऊपर होकर गुजरती है, धामा जाय तो यह मालूम किया गया है कि चाहे डोरी किसी भी दिशा ( $AB, AC$ , अथवा  $AD$ ) में क्यों न खींची जाय, उसके दूसरे सिरे पर लगाया गया बल वही रहता है और यह बल  $W$  के बराबर होता है।



[इन बलों को डोरी के मुक्त सिरे को स्प्रिंग तुला (कमानीदार तराजू) में बाँध कर नापा जा सकता है।]

अतः उस हल्की डोरी का तनाव जो किसी चिकनी खूँटी के ऊपर होकर गुजरती है, डोरी की सारी लम्बाई में वही रहता है।

यदि दो अथवा दो से अधिक डोरियाँ एक दूसरे से गाँठ द्वारा बँधी हों तो प्रत्येक डोरी में तनाव अनिवार्य रूप से वही नहीं रहता।

विद्यार्थी को स्मरण रखना चाहिये कि किसी डोरी का तनाव उसकी लम्बाई का अनुपाती नहीं होता। यह समझना कि जितनी लम्बी डोरी हो उतना ही अधिक तनाव होता है साधारण भूल है। यह ठीक है कि यदि डोरी अधिक बड़ी हो तो हम अधिक मुविधा से बल का प्रयोग कर

सकते हैं और इसलिये नौसिखिया यह मान लेता है कि अधिक बड़ी दौरी का अधिक तनाव होता है।

१६-प्रतिबल। यदि कोई पिंड किसी दूसरे पिंड के सहारे झुका हो अथवा उससे दबा हुआ हो तो प्रत्येक पिंड स्पर्श-बिन्दु पर एक बल का अनुभव करता है जिसे प्रतिबल कहते हैं।

वह बल जिसका प्रयोग एक पिंड दूसरे पर करता है उस बल अथवा प्रतिबल के विपरीत होता है जिसका प्रयोग दूसरा पिंड पहले पर करता है।

यह बात न्यूटन के तीसरे गति नियम (Newton's Third Law of Motion) में बतलाई गई है (भाग २, धारा ७३)।

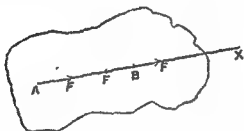
उदाहरण। यदि कोई सीढ़ी किसी दीवार के सहारे झुकी हो तो सीढ़ी के सिरे से दीवार पर जिस बल का प्रयोग होता है, वह उस बल के बराबर तथा विपरीत होता है जिसका प्रयोग दीवार सीढ़ी के सिरे पर करती है।

यदि लकड़ी के किसी घन की भेज पर रखें तो वह बल जिसका प्रयोग वह भेज पर करता है उस बल के बराबर तथा विपरीत होता है जिसका प्रयोग भेज उस पर करती है।

१७-समतुलन (Equilibrium). यदि एक पिंड पर दो अथवा दो से अधिक बल कार्य कर रहे हों परन्तु पिंड निश्चल स्थिति में रहे तो वे सब बल समतुलित कहलाते हैं।

१८-दो बराबर तथा विपरीत बलों का प्रवेश-अथवा पुथक करना। हम इस बात को मान लेंगे कि यदि किसी दृढ़ पिंड के किसी बिन्दु पर हम दो बराबर तथा विपरीत बलों को लगायें तो उनका पिंड को समतुलित अवस्था पर कोई प्रभाव नहीं होता; इसी प्रकार एक पिंड के किसी बिन्दु पर यदि दो बराबर तथा विपरीत बल कार्य कर रहे हों तो उन्हें हटाया जा सकता है।

१.६.—बल के प्रेषण (Transmissibility) का नियम । यदि कोई बल एक दृढ़ पिंड के किसी बिन्दु पर कार्य कर रहा हो तो उसे उसको रेखा के किसी दूसरे बिन्दु पर कार्य करता हुआ समझा जा सकता है यदि यह पिछला बिन्दु पिंड से दृढ़ता पूर्वक सम्बद्ध हो ।



मान लो कोई बल  $F$  एक पिंड के किसी बिन्दु  $A$  पर  $AX$  दिशा में कार्य कर रहा है ।  $AX$  पर कोई बिन्दु  $B$  लो और  $B$  पर दो बराबर तथा विपरीत बल, जिनमें से प्रत्येक  $F$  के बराबर है,  $BA$  और  $BX$  दिशाओं में कार्य करते हुये लगाओ । इनका पिंड के समतुलन पर कोई प्रभाव नहीं होगा ।

$A$  पर  $AB$  दिशा में कार्य करता हुआ बल  $F$  और  $B$  पर  $BA$  दिशा में कार्य करता हुआ बल  $F$ , बराबर और विपरीत है, इसलिये हम यह मान सकते हैं कि वे एक दूसरे का निराकरण करते हैं अथवा एक दूसरे के प्रभाव को नष्ट करते हैं और इसलिये वे हटाये जा सकते हैं ।

इस प्रकार हमारे पास  $B$  पर  $BX$  दिशा में कार्य करता हुआ बल  $F$  रह जाता है और इसका प्रभाव वही है जो  $A$  पर मौलिक बल  $F$  का है ।

पिंड में आंतरिक बल भिन्न होंगे जबकि बलों का प्रयोग  $A$  अथवा  $B$  पर होगा । इस पुस्तक में हम आंतरिक बलों पर विचार नहीं करेंगे ।

२०.—चिकने पिंड । यदि हम लकड़ी के एक चिकने पालिस किये हुये समतल टुकड़े को किसी यथाशक्ति चिकनी मेज पर रखें और उस

टुकड़े को मेज के धरातल पर खिसकाने का यत्न करें तो हमें कुछ प्रतिरोध का अनुभव होगा। अतः लकड़ी के टुकड़े और मेज के धरातल के बीच हमेशा एक बल होगा चाहे वह कितना ही कम क्यों न हो।

यदि उपर्युक्त दोनों पिण्ड पूरे चिकने हों तो लकड़ी के टुकड़े और मेज के बीच में मेज के धरातल के समानान्तर कोई बल नहीं होगा। उनके बीच का एक-मात्र बल मेज पर लम्ब होगा।

**परिभाषा।** जब परस्पर स्पर्श करते हुये दो पिण्ड पूर्णतः चिकने हों तो उनके बीच का बल अथवा प्रतिबल-स्पर्श बिन्दु पर उनके उभयनिष्ठ धरातल पर लम्ब होता है।

## अध्याय २

### बल-संयोजन तथा बल-विश्लेषण

#### (Composition and Resolution of Forces)

२१--मान लो कि लकड़ी का एक चपटा टुकड़ा चिकनी मेज पर रखा हुआ है और वह तीन डोरियों से, जो उसके तीन कोनों पर बंधी हुई है, इस प्रकार खींचा जा रहा है कि डोरियाँ क्षैतिज तल में हों, और यदि डोरियों के तनाव इस प्रकार व्यवस्थित हों कि लकड़ी का टुकड़ा निश्चल रहता है तो तीनों बल समतुलित होते हैं।

अतः बलों में से कोई दो बल मिलकर उस बल के बराबर कार्य करते हैं जो तीसरे बल के बराबर तथा विपरीत होता है। यह बल, जो तीसरे बल के बराबर तथा विपरीत है, पहले दो बलों का परिणामी अथवा लब्ध बल कहलाता है।

२२--परिणामी बल (Resultant). परिभाषा। यदि दो अथवा दो से अधिक बल  $P, Q, S, \dots$  एक दृढ़ पिंड पर लगाये जायें, और यदि एक ऐसा एक मात्र बल,  $R$ , मालूम हो जाय, जिसका प्रभाव पिंड पर वही है जो  $P, Q, S, \dots$  का है, तो यह एकमात्र बल  $R$  उन बलों का परिणामी अथवा लब्ध बल कहलाता है और बल  $P, Q, S, \dots$  बल  $R$  के अवयव बल (Components) कहलाते हैं।

परिभाषा से यह परिणाम निकलता है कि यदि  $R$  के बराबर तथा विपरीत किसी बल को पिंड पर लगाया जाय, तो पिंड पर कार्य करने वाले बल समतुलित होते हैं, इसके विलोमतः यदि किसी पिंड पर कार्य करने वाले बल समतुलित हों तो उनमें से प्रत्येक दोष बलों के परिणामी के बराबर तथा विपरीत होता है।



२३-एक ही सरल रेखा में कार्य करते हुये बलों का परिणामी बल ।

यदि दो बल एक पिंड पर एक ही दिशा में कार्य करें तो उनका परिणामी बल उनके योग के बराबर होता है ; जैसे 5 और 7 पौंड भार के एक ही दिशा में कार्य करने हुये दो बल उसी दिशा में कार्य करने हुये 12 पौंड भार के एक बल के बराबर होते हैं ।

यदि दो बल एक पिंड पर विपरीत दिशाओं में कार्य करें तो उनका परिणामी बल उनका अन्तर होता है और बड़े बल की दिशा की ओर कार्य करता है ; जैसे 9 और 4 पौंड भार के विपरीत दिशाओं में कार्य करने हुये दो बल दोनों बलों में से पहले बल की दिशा की ओर कार्य करते हुये 5 पौंड भार के एक बल के बराबर होते हैं ।

२४-जब दो बल किसी दृढ़ पिंड के एक बिन्दु पर भिन्न भिन्न दिशाओं में कार्य करें तो उनका परिणामी बल निम्न प्रकार मालूम किया जा सकता है ।

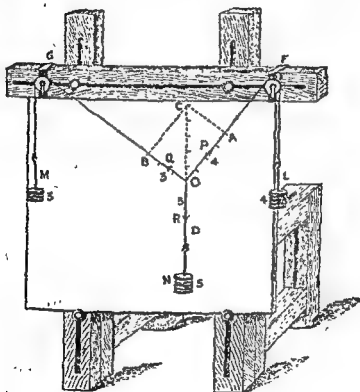
भाष्य । बल-समानान्तर-चतुर्भुज (Parallelogram of Forces). यदि एक बिन्दु पर कार्य करते हुये दो बल, परिमाण और दिशा में, किसी समानान्तर चतुर्भुज के एक शीर्ष से गीची गई दो भुजाओं से प्रदर्शित किये जायें तो उनका परिणामी बल, परिमाण और दिशा में, उस शीर्ष से गीचे गये विकर्ण से प्रदर्शित होता है ।

स्थिति विज्ञान के इस मूल भाष्य का अथवा उसके दूरगरे हुए 'बल त्रिभुज' (Triangle of Forces) (धारा ३६) का प्रथम बार शिब्रेड के स्टैपिंग में १५८६ ई० में वर्णन किया था । उनके जीवन काल में पहले स्थिति विज्ञान लीवर के नियम (Principle of the Lever) पर आधारित था ।

अगली धारा में हम प्रयोगात्मक प्रमाण देंगे । इसका लौकिक प्रमाण अल्बिनस अभ्वाच में दिया गया है ।

इस गुणक के दूरगरे भाग के धारा ७२ में ग्युटन के गति नियम पर आधारित प्रमाण दिया गया है ।

२५-प्रयोगात्मक प्रमाण (Experimental Proof). मान लो  $F$  और  $G$  किसी नियत आलम्बन से लगी हुई दो हल्की घिरनियाँ (pulleys) हैं, और मान लो उनके ऊपर होकर गुजरती हुई दो हल्की डोरियाँ एक दूसरे में  $O$  पर बँधी हुई हैं और उनके सिरों पर  $L$  और  $M$  दो पलड़े हैं।



एक और डोरी  $O$  पर बँधी हुई है और एक तीसरे पलड़े  $N$  को यामे हुये हैं।

इन पलड़ों में ज्ञात भार रखे हुये हैं और सम्पूर्ण समुदाय समतुलित अवस्था में है। मान लो पलड़ों में रखे हुये भार पलड़ों के भार-सहित क्रम में  $P$ ,  $Q$ , और  $R$  पौड है।

समुदाय के पीछे एक ब्लैकबोर्ड अथवा कागज के टुकड़े पर रेखाएँ  $OF$ ,  $OG$ , और  $ON$ , जैसा कि चित्र में दिखाई गई हैं, खींचो।

किसी उचित पैमाने को (जैसे तीन इंच अथवा उससे कम को एक पाँड) मान कर  $OA$ ,  $OB$ , और  $OD$  को  $P$ ,  $Q$ , और  $R$  पाँड प्रदर्शित करते हुये चिन्ह लगा दो। समानान्तर-चतुर्भुज  $OACB$  को पूरा करो। तो  $OC$  लम्बाई में  $OD$  के बराबर और दिशा में उसके विपरीत होगी।

परन्तु चूँकि  $P$ ,  $Q$ , और  $R$  संतुलित हैं, इसलिये  $R$ ,  $P$  और  $Q$  के परिणामी बल के बराबर तथा विपरीत होगा।

इसलिये  $P$  और  $Q$  का परिणामी बल  $OC$  से अर्थात् उस समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण से प्रदर्शित होता है जिसकी भुजाएँ  $P$  और  $Q$  को प्रदर्शित करती हैं।

यह फल हमेशा सही रहेगा चाहे  $P$ ,  $Q$ , और  $R$  के आपेक्षिक प्रमाण कुछ ही क्यों न हों और यदि उनमें से कोई एक शेष दो के योग से बड़ा हो।

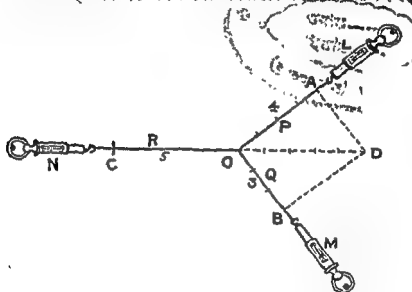
चित्र में  $P$ ,  $Q$ , और  $R$  क्रम से 4, 3, और 5 पाँड के बराबर माने गये हैं। और चूँकि  $5^2 = 4^2 + 3^2$ , इसलिये  $AOB$  एक समकोण है।

इस प्रयोग को करने में सम्भव है कि बिन्दु  $O$  एक दूसरे के निकट भिन्न भिन्न स्थानों पर हटाया जा सके। इसका कारण यह है कि हम घिरनियों के चूलों पर के घर्षण को बिल्कुल दूर नहीं कर सकते हैं। यदि घिरनियों के व्यास बड़े हों तो इस घर्षण का प्रभाव कम हो जायगा। ऐसे प्रयोगों में ऐलुमीनियम की घिरनियाँ अच्छी होती हैं क्योंकि वे विस्तार में बड़ी और भार में हल्की होती हैं।

माधारण प्रयोगों में ऐमे ठोम यन्त्रों को, जैसे कि चित्र में दिखाये गये हैं, आवश्यकता नहीं होती। घिरनियाँ  $F$  और  $G$  में छेद किये जा सकते हैं जिनमें होकर कोले ऊर्ध्वाधर ब्लैक बोर्ड पर गाड़ी जा सकती हैं।

पूर्वोक्त प्रयोग में धिरनियों और भारों की जगह तीन स्प्रिंग तुलाओं का प्रयोग भी किया जा सकता है। इन तुलाओं में एक सूचक होता है जो एक अंशांकित फलक पर ऊपर-नीचे घूम कर सिरे की कटिया पर लगाये हुये बल को प्रदर्शित करता है।

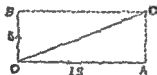
0 पर बैठो हुई तीन हल्की डोरियाँ स्प्रिंग तुलाओं के सिरों से बांध दी जाती है। फिर तीनों तुलाओं को खींच कर किसी क्षीय मेज पर रख देते हैं और मेज पर कठियों अथवा कीलों द्वारा नियत कर देते



है जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है। इस प्रकार तुलाओं द्वारा बतलाये जाने वाले परिमाण तीनों डोरियों के तनाव  $P, Q$ , और  $R$  को सूचित करते हैं। पिछले प्रयोग की भाँति हम  $OA, OB$ , और  $OC, P, Q$ , और  $R$  को प्रदर्शित करते हुये कोई उचित पैमाना मान कर खींचते हैं, और इस बात की जाँच करते हैं कि  $OC$  लम्बाई में  $OD$  के, जो उस समानान्तर चतुर्भुज का विकर्ण है जिसकी आसन्न भुजाएँ  $OA$  और  $OB$  हैं, बराबर हैं और दिशा में उसके ठीक विपरीत है।

२६-दो बलों के परिणामी बल की दिशा और परिमाण मालूम करने के लिये हमें उस समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण की दिशा और परिमाण मालूम करने होते हैं जिसकी दो आसन्न भुजाएँ दोनों बलों की प्रदर्शित करती हैं।

उदाहरण १। 12 पी० और 5 पी० भार के रूढ़ दो बलों का परिणामी बल मालूम करो जो एक दूसरे से समकोण बनाते हुये लगे हैं।



मान लो  $OA$  और  $OB$  बलों की प्रदर्शित करती हैं और यह लम्बाई में 12 और 5 इकाइयों के बराबर हैं। आयत  $OACB$  को पूरा करो।

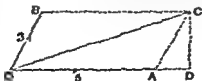
$$\text{अब } OC^2 = OA^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169.$$

$$\therefore OC = 13.$$

और स्पष्ट्या  $\angle COA = \frac{AC}{OA} = \frac{5}{12}$

अतः परिणामी बल 13 पी० भार के बराबर है जो पहले बल से वह कोण बनाता है जिसकी स्पष्ट्या  $\frac{5}{12}$  है, अर्थात् जो  $22^\circ 37'$  के बराबर है।

उदाहरण २। 5 पी० और 3 पी० भार के दो बलों का परिणामी बल मालूम करो जो एक दूसरे से  $60^\circ$  का कोण बनाते हुये लगे हैं।



मान लो  $OA$  और  $OB$  बलों को प्रदर्शित करते हैं और यह म्बाई में 5 और 3 इकाइयों के बराबर हैं, और मान लो कोण  $AOB = 60^\circ$ .

समानान्तर चतुर्भुज  $OACB$  को पूरा करो और  $CD$  को  $OA$  पर लम्ब डालो। अब  $OC$  वाञ्छित परिणामी बल को प्रदर्शित करेगा।

चूँकि  $AD = AC$  कोज्या  $CAD = 3$  कोज्या  $60^\circ = \frac{3}{2}$ ;

$$\therefore OD = \frac{3}{2}.$$

$$\text{और } DC = AC \text{ ज्या } 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore OC = \sqrt{OD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$\text{और स्पज्या } COD = \frac{DC}{OD} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = 3.997.$$

अतः परिणामी बल 7 पी० भार के बराबर है और वह  $OD$  से जो कोण बनाता है उसकी स्पज्या 3.997 है।

प्राकृतिक स्पर्गज्याओं की सारिणी से यह कोण  $21^\circ 47'$  के बराबर निकल आयेगा।

२७- $P$  और  $Q$  दो बलों का परिणामी बल  $R$ , जो एक दूसरे से कोण  $\alpha$  बनाते हैं, त्रिकोणमिति द्वारा भी मालूम किया जा सकता है।

मान लो  $OA$  और  $OB$ ,  $P$  और  $Q$  बलों को, जो एक दूसरे से कोण  $\alpha$  बनाते हैं, प्रदर्शित करते हैं। समानान्तर चतुर्भुज  $OACB$  को पूरा करो और  $OA$  पर, यदि आवश्यकता हो तो बढ़ाये जाने पर,  $CD$  लम्ब डालो।

मान लो  $R$  परिणामी बल के परिमाण को प्रदर्शित करता है।

$$\therefore OD = OA + AD = OA + AC \text{ कोज्या } DAC$$

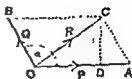
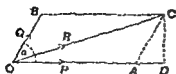
$$= P + Q \text{ कोज्या } BOD = P + Q \text{ कोज्या } \alpha$$

[यदि  $D$ ,  $O$  और  $A$  के बीच में हो जैसा कि दूसरे चित्र में है, तो

$$= OA - DA = OA - AC \text{ कोज्या } DAC$$

$$= P - Q \text{ कोज्या } (180^\circ - \alpha) = P + Q \text{ कोज्या } \alpha]$$

और  $DC = AC$  ज्या  $DAC = Q$  ज्या  $a$ .



$$\begin{aligned}\therefore R^2 &= OC^2 = OD^2 + CD^2 \\ &= (P + Q \cos a)^2 + (Q \sin a)^2 \\ &= P^2 + Q^2 + 2PQ \cos a.\end{aligned}$$

$$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos a} \dots\dots\dots (1),$$

$$\text{और स्पष्ट्या } \cos D = \frac{DC}{OD} = \frac{Q \sin a}{P + Q \cos a} \dots\dots\dots (2).$$

इन दोनों समीकरणों से परिणामी बल का परिमाण और उसकी दिशा मालूम हो जाती है।

उपसाध्य १। यदि बल एक दूसरे पर लम्ब है, तो  $a = 90^\circ$ , इसलिये  $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ , और स्पष्ट्या  $\cos A = \frac{Q}{P}$ .

उपसाध्य २। यदि प्रत्येक बल  $P$  के बराबर है, तो

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{P^2(1 + 1 + 2 \cos a)} = P \sqrt{2(1 + \cos a)} \\ &= P \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{a}{2}} = 2P \cos \frac{a}{2},\end{aligned}$$

$$\text{और स्पष्ट्या } \cos A = \frac{P \sin a}{P + P \cos a} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \sin \frac{a}{2}.$$

अतः दो बराबर बलों का परिणामी बल उनके बीच के कोण को समविभाजित करता है; यह बात प्रारम्भिक मूलों से भी स्पष्ट है।

### उदाहरणमाला १

१। निम्न सात प्रश्नों में  $P$  और  $Q$  वे दो अवयव बल हैं जिनके बीच का कोण  $\alpha$  है और जिनका परिणामीबल  $R$  है। [अपने फलों की जाँच लेखाचित्र खींच कर तथा नाप कर करो।]

(१) यदि  $P=24$ ;  $Q=7$ ;  $\alpha=90^\circ$ ;  $R$  मालूम करो।

(२) यदि  $P=13$ ;  $R=14$ ;  $\alpha=90^\circ$ ;  $Q$  मालूम करो।

(३) यदि  $P=7$ ;  $Q=8$ ;  $\alpha=60^\circ$ ;  $R$  मालूम करो।

(४) यदि  $P=5$ ;  $Q=9$ ;  $\alpha=120^\circ$ ;  $R$  मालूम करो।

(५) यदि  $P=3$ ;  $Q=5$ ;  $R=7$ ;  $\alpha$  मालूम करो।

(६) यदि  $P=13$ ;  $Q=14$ ;  $\alpha=\text{ज्या}^{-1}\frac{1}{3}$ ;  $R$  मालूम करो।

(७) यदि  $P=5$ ;  $R=7$ ,  $\alpha=60^\circ$ ;  $Q$  मालूम करो।

०२। 12 पौ० और 8 पौ० भार के दो बलों का महत्तम और लघुतम परिणामीबल मालूम करो।

३। 3, 4, 5, और 6 पौ० भार के बल एक कण पर क्रमशः उत्तर, दक्षिण, पूर्व और पच्छिम दिशाओं में लगाये गये हैं; उनके परिणामी बल की दिशा और परिमाण मालूम करो।

०४। 84 और 187 पौ० भार के दो बल एक दूसरे से समकोण बनाते हुये लगे हुये हैं; उनका परिणामी बल मालूम करो।

०५।  $P$  और  $P\sqrt{2}$  पौ० भार के दो बल एक कण पर एक दूसरे से  $135^\circ$  का कोण बनाते हुये लगाये गये हैं; उनके परिणामीबल की दिशा और परिमाण मालूम करो।

६। दो बलों के बीच में  $60^\circ$  का कोण है, और उनका परिणामी  $2\sqrt{3}$  पौ० भार के बराबर है; यदि उनमें से एक बल 2 पौ० भार के बराबर है, तो दूसरे बल का परिमाण मालूम करो।

०७। 13 पौ० और 11 पौ० भार के दो बलों का परिणामीबल मालूम करो जिनके बीच के कोण की स्पर्शज्या  $\frac{1}{2}$  है। चित्र खींच कर अपने उत्तर की जाँच करो।



०८। 10 पौ० और 9 पौ० भार के दो बलों का परिणामीबल मालूम करो बलों के बीच के कोण की स्पर्शज्या  $\frac{1}{2}$  है। चित्र खींच कर अपने उत्तर की जाँच करो।

०९। दो बराबर बल एक कण पर कार्य करते हैं; उनके बीच का कोण मालूम करो जबकि उनके परिणामीबल का वर्ग उनके गुणनफल के तिगुने के बराबर है।

०१०। उन दो बलों के परिमाण मालूम करो जब कि वे एक दूसरे से समकोण बनाते हुए कार्य करते हैं तो उनका परिणामीबल  $\sqrt{10}$  पौ० भार के बराबर है और जब वे एक दूसरे से  $60^\circ$  का कोण बनाते हुये कार्य करने हैं तो उनका परिणामीबल  $\sqrt{13}$  पौ० भार के बराबर होता है।

११। दो बराबर बलों  $P$  के बीच का कोण मालूम करो जबकि उनका परिणामीबल (१)  $P$  के बराबर, (२)  $\frac{P}{2}$  के बराबर है।

१२। दो बल  $(A+B)$  और  $(A-B)$  कौनसा कोण बनाते हुये लगाये जायें कि उनका परिणामीबल  $\sqrt{A^2+B^2}$  हो?

१३। दो बल एक कण पर कार्य करते हैं; बताओ किम दिशा में दिये हुये परिमाण का एक तीसरा बल लगाया जाय कि तीनों का परिणामीबल महत्तम हो।

१४। निम्न प्रश्नों को केवल चित्र खींचकर हल करो:

(१) यदि  $P=10$ ;  $Q=15$ ;  $\alpha=37^\circ$ ;  $R$  मालूम करो।

(२) यदि  $P=9$ ,  $Q=7$ ;  $\alpha=133^\circ$ ;  $R$  मालूम करो।

(३) यदि  $P=7$ ;  $Q=5$ ;  $R=10$ ;  $\alpha$  मालूम करो।

(४) यदि  $P=7.3$ ;  $R=8.7$ ;  $\alpha=63^\circ$ ;  $Q$  मालूम करो।

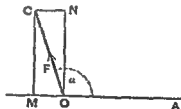
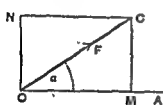
२८-दो बलों का, जिनके परिमाण और दिशाएँ दी हुई हैं, केवल एक ही परिणामीबल होता है; क्योंकि एक ही गमानान्तर चतुर्भुज  $O.A$  और  $O.B$  रेखाओं को आमत्र भुजाएँ मानकर खींचा जा सकता है। (चित्र धारा २७)

२९—किसी एक बल के दो अवयव बल अनन्त ढंग से मालूम किये जा सकते हैं, क्योंकि  $OC$  को विकर्ण मानकर समानान्तर चतुर्भुजों की रचना अनन्त संख्या में की जा सकती है, और इनमें से प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज से अवयव बलों के जोड़े निकल आते हैं।

३०—बलों के विश्लेषण की सबसे आवश्यक स्थिति वह है जब हम किसी बल को ऐसे दो अवयव बलों में विश्लिष्ट करते हैं जो एक दूसरे पर लम्ब हों।

मान लो हमें किसी बल  $F$  को, जो  $OC$  से प्रदर्शित किया गया है, दो ऐसे अवयव बलों में विश्लिष्ट करना है जिनमें से एक की दिशा  $OA$  है और दूसरा  $OA$  पर लम्ब है।

$OA$  पर  $CM$  लम्ब डालो और समानान्तर चतुर्भुज  $OMCN$  को पूरा करो। चूँकि  $OM$  और  $ON$  से प्रदर्शित किये गये बलों का परिणामीबल  $OC$  है, इसलिये  $OM$  और  $ON$  इष्ट अवयव बल हैं।



मान लो कोण  $\angle AOC = \alpha$ ,

अब  $OM = OC \cos \alpha = F \cos \alpha$ ,

और  $ON = MC = OC \sin \alpha = F \sin \alpha$ .

[यदि बिन्दु  $M$ ,  $OA$  के बिन्दु की ओर बढ़ाये जाने पर स्थित है, जैसा कि दूसरे चित्र में दिखलाया गया है, तो  $OA$  दिशा में  $F$  का अवयव बल  $= -OM = -OC \cos \alpha$   $\angle COM = -OC \cos \alpha (180^\circ - \alpha)$   $= OC \cos \alpha = F \cos \alpha$ .

और  $OA$  पर लम्ब अवयव बल  $=ON=MC=OC$  ज्या  $COM = F$  ज्या  $\alpha$ ]

अतः प्रत्येक स्थिति में, इष्ट अवयव बल  $F$  कोज्या  $\alpha$  और  $F$  ज्या  $\alpha$  है।

जैसे, 10 पौ० भार का बल, जो क्षैतिज से  $60^\circ$  के कोण पर कार्य करता है, क्षैतिज दिशा में 10 कोज्या  $60^\circ$  ( $=10 \times \frac{1}{2} = 5$  पौ० भार) और उर्ध्वाधर दिशा में 10 ज्या  $60^\circ$  ( $=10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \times 1.732 = 8.66$  पौ० भार) के बराबर है।

३१-परिभाषा-। किसी दिये हुये बल का किसी दी हुई दिशा में विरल्लिष्ट भाग (Resolved Part) वह अवयव बल है जो दी हुई दिशा की लम्ब दिशा के अवयव बल सहित दिये हुये बल के बराबर होता है।

जैसे पिछलो धारा में बल  $F$  का  $OA$  दिशा में विरल्लिष्ट भाग  $F$  कोज्या  $\alpha$  है। अतः, किसी दिये हुये बल का किसी दी हुई दिशा में विरल्लिष्ट भाग दिये हुये बल का उसकी और दी हुई दिशा के बीच के कोण की कोज्या से गुणा करने से प्राप्त हो जाता है।

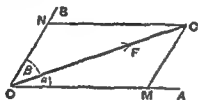
३२-किसी बल का अपनी दिशा के लम्ब दिशा में कोई प्रभाव नहीं होता। क्योंकि कोई कारण नहीं है (चित्र धारा ३०) कि बल  $ON$  की, कण  $O$  को  $OA$  दिशा अथवा बढ़ाई हुई  $AO$  दिशा में खींचने की कोई भी प्रवृत्ति हो, अतः बल  $ON$  की कण को  $OA$  अथवा  $AO$  दिशा की ओर खींचने की प्रवृत्ति नहीं हो सकती।

उदाहरणार्थ, यदि रेल का एक डब्बा रेल की सड़क पर सड़ा हुआ हो तो कोई भी क्षैतिज बल जो रेल की सड़क की लम्ब दिशा में लगाया जाता है उसे रेल की दिशा की ओर नहीं खींच सकता।

३३-किसी दिये हुये बल का किसी दी हुई दिशा में विरल्लिष्ट

भाग उस दिशा में बल के पूर्ण प्रभाव को प्रदर्शित करता है। क्योंकि, (चित्र धारा ३०) बल  $OC$ ,  $ON$  और  $OM$  बलों से पूर्णतया प्रदर्शित हो जाता है। परन्तु बल  $ON$  का कोई प्रभाव  $OA$  दिशा में नहीं होता। अतः बल  $F$  का पूर्ण प्रभाव  $ON$  दिशा में  $OM$  से, अर्थात् बल के  $OA$  दिशा में विशिष्ट भाग से, प्रदर्शित होता है।

३४—किसी बल के अवयव बल किन्हीं दो निर्दिष्ट दिशाओं में मालूम किये जा सकते हैं।



मान लो बल  $F$  के अवयव बल, जो  $OC$  से प्रदर्शित किया गया है,  $OA$  और  $OB$  दिशाओं में मालूम करने हैं, और मान लो कोण  $AOC$  और  $COB$  क्रमशः  $\alpha$  और  $\beta$  हैं।

$OB$  के समानान्तर  $CM$  खींचो जो  $OM$  को  $M$  पर मिले और समानान्तर चतुर्भुज  $OMCN$  को पूरा करो।

अब  $OM$  और  $ON$  इष्ट अवयव बल होंगे।

चूँकि  $MC$  और  $ON$  समानान्तर हैं, इसलिये

$$\angle OCM = \beta; \text{ और } \angle OMC = 180^\circ - \angle CMA = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

चूँकि त्रिभुज  $OMC$  की भुजायें सम्मुख के कोणों की ज्याओं के समानुपाती हैं, इसलिये

$$\frac{OM}{\text{ज्या } \angle OCM} = \frac{MC}{\text{ज्या } \angle MOC} = \frac{OC}{\text{ज्या } \angle OMC}.$$

$$\therefore \frac{OM}{\text{ज्या } \beta} = \frac{MC}{\text{ज्या } \alpha} = \frac{F}{\text{ज्या } (\alpha + \beta)}.$$

अतः इष्ट अवयव बल  $F \frac{\cos \beta}{\cos (\alpha + \beta)}$  और  $F \frac{\cos \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$  है।

३५-विद्यार्थी को ध्यानपूर्वक स्मरण रमना चाहिये कि किसी बल के अवयव बल किन्हीं निर्दिष्ट दिशाओं में उस बल के उन्हीं दिशाओं में विदिल्लिष्ट भाग के बराबर नहीं होते। जैसे,  $F$  का  $OA$  दिशा में विदिल्लिष्ट भाग, धारा ३० से,  $F \cos \alpha$  है।

### उदाहरणमाला २

१। 10 पौ० भार का बल क्षैतिज से  $30^\circ$  के कोण पर कार्य करता है ; क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं में उसके विदिल्लिष्ट भाग मालूम करो।

२। बल  $P$  का विदिल्लिष्ट भाग उसकी दिशा से (१)  $45^\circ$  का कोण, और (२)  $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$  का कोण बनाते हुये मालूम करो।

३। रेल की सड़क पर एक डिब्बा खड़ा है और उसपर 100 पौ० भार का एक क्षैतिज बल रेल की सड़क से  $60^\circ$  का कोण बनाते हुए लगाया गया है; बताओ कौनसा बल गाड़ी को आगे की ओर खींच रहा है।

४। 100 पौ० भार के बल को दो बराबर बलों में, जो एक दूसरे से  $60^\circ$  का कोण बनाते हैं, विभाजित करो। लेखाचित्र द्वारा तथा नाप कर अपने फल की जाँच करो।

५। 50 पौ० भार के बल को दो बलों में विदिल्लिष्ट करो जो उससे विपरीत दिशाओं में  $60^\circ$  और  $45^\circ$  के कोण बनाते हैं। लेखाचित्र द्वारा तथा नाप कर अपने फल की जाँच करो।

६। बल  $P$  के अवयव बल मालूम करो जो उससे विपरीत दिशाओं में  $30^\circ$  और  $45^\circ$  के कोण बनाते हैं।

७। यदि किसी बल  $P$  के अवयव बल उसकी दिशा से  $45^\circ$  और  $15^\circ$  के कोण बताते हैं, तो मिट करो कि दूसरा बल  $\frac{\sqrt{6}}{3}P$  के बराबर है।

८। एक दिये हुए ऊर्ध्वाधर बल  $F$  के दो अवयव बल मालूम करो जिनमें से एक क्षैतिज दिशा की ओर हो और दूसरा ऊर्ध्वाधर से  $60^\circ$  का कोण बनाता हो।

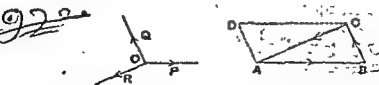
९। यदि किसी बल के दो अवयव बलों में से एक दिये हुये बल पर लम्ब और परिमाण में उसके बराबर है, तो दूसरे अवयव बल की दिशा और उसका परिमाण मालूम करो।

१०। यदि एक २० पौं० भार के ऊर्ध्वाधर बल के दो अवयव बलों में से एक क्षैतिज दिशा की ओर है और १० पौं० भार के बराबर है, तो दूसरे बल का परिमाण और दिशा मालूम करो।

११। ३५ पौं० भार के बल के दो अवयव बल, जो उसमें विपरीत दिशाओं में  $98^\circ$  और  $40^\circ$  के कोण बनाते हैं, रचना तथा नाप द्वारा मालूम करो।

३६—बल-त्रिभुज (Triangle of Forces). यदि एक बिन्दु पर प्रयोग करते हुये तीन बल, परिमाण और दिशाओं में क्रमानुसार किसी त्रिभुज की भुजाओं से प्रदर्शित किये जा सकें तो वे समतुलित होते हैं।

मान लो बिन्दु  $O$  पर प्रयोग करते हुए बल  $P, Q$  और  $R$  परिमाण और दिशाओं में त्रिभुज  $ABC$  की भुजाओं  $AB, BC$  और  $CA$  से प्रदर्शित होते हैं, वे समतुलित होंगे।



समानान्तर चतुर्भुज  $ABCD$  को पूरा करो।

चूँकि  $BC$  और  $AD$  बराबर और समानान्तर हैं, इसलिये जो बल  $BC$  से प्रदर्शित होता है वह  $AD$  से भी प्रदर्शित होता है।

अब  $AB$  और  $AD$  का परिणामी बल, बल समानान्तर चतुर्भुज से,  $AC$  से प्रदर्शित होता है ।

अब  $AB$ ,  $BC$  और  $CA$  का परिणामीबल  $AC$  और  $CA$  के परिणामीबल के बराबर है और इसलिये शून्य है ।

इसलिये तीनों बल  $P$ ,  $Q$  और  $R$  समतुलित हैं ।

उपसाध्य । चूँकि  $AB$ ,  $BC$  और  $CA$  से प्रदर्शित किये गये बल समतुलित हैं, और चूँकि, जब तीन बल समतुलित होते हैं तो उनमें से प्रत्येक शेष दो बलों के परिणामीबल के तुल्य और विपरीत होता है, इसलिये  $AB$  और  $BC$  का परिणामीबल  $CA$  के तुल्य और विपरीत होता अर्थात् उनका परिणामीबल  $AC$  में प्रदर्शित होगा ।

अतः एक बिन्दु पर प्रयोग करते हुये दो बलों का परिणामीबल, जो त्रिभुज की  $AB$  और  $BC$  भुजाओं से प्रदर्शित होते हैं, तीसरी भुजा  $AC$  से प्रदर्शित होता है ।

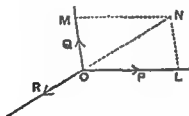
३७—बल त्रिभुजों में विद्यार्थी को स्मरण रखना चाहिये कि बल, त्रिभुज की भुजाओं के, क्रमानुसार समानान्तर होने चाहियें ।

जैसे, यदि पहला बल  $AB$  दिशा में कार्य करता है तो दूसरे बल को  $BC$  दिशा में और तीसरे को  $CA$  दिशा में कार्य करना चाहिये । यदि दूसरा बल  $BC$  दिशा की जगह  $CB$  दिशा की ओर कार्य करे तो बल समतुलित नहीं होंगे ।

तीनों बलों को एक ही बिन्दु पर कार्य करना चाहिये ; यदि बलों के कार्य करने की रेखाएँ  $BC$ ,  $CA$  और  $AB$  हैं तो वे समतुलित नहीं होंगे, क्योंकि बल  $AB$  और  $BC$  का एक परिणामी बल होगा जो  $B$  पर कार्य करेगा और जो  $AC$  के तुल्य और समानान्तर होगा । ऐसी दशा में बल दो तुल्य और समानान्तर और विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुए बलों में परिणत हो जायेंगे और जैसा कि हम एक आगे के अध्याय में देखेंगे, बलों के ऐसे जोड़े समतुलित नहीं हो सकते ।

३८—बल त्रिभुज का विलोम भी सही है अर्थात् यदि एक बिन्दु पर कार्य करते हुये तीन बल समतुलित हैं तो वे परिमाण और दिशाओं में किसी त्रिभुज की भुजाओं से प्रदर्शित किये जा सकते हैं जो इस प्रकार खींचा गया है कि उसकी भुजायें बलों की दिशाओं के क्रमानुसार समानान्तर हैं।

मान लो बिन्दु  $O$  पर कार्य करते हुए तीन बल  $P, Q$  और  $R$  समतुलित हैं।  $P$  और  $Q$  की दिशाओं की ओर क्रमशः इन बलों को प्रदर्शित करती हुई  $OL$  और  $OM$  नापो।



समानान्तर चतुर्भुज  $OLNM$  को पूरा करो और  $ON$  को मिला दो।

चूँकि तीनों बल  $P, Q$  और  $R$  समतुलित हैं, इसलिये इनमें से प्रत्येक शेष दो बलों के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा अतः  $R, P$  और  $Q$  के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा और इसलिये  $NO$  से प्रदर्शित होगा। और चूँकि  $LN, OM$  के बराबर और समानान्तर हैं, इसलिये तीनों बल  $P, Q$  और  $R$  त्रिभुज  $OLN$  की भुजाओं  $OL, LN$  और  $NO$  के समानुपाती हैं।

किसी भी दूसरे त्रिभुज की भुजायें, जिसकी भुजायें त्रिभुज  $OLN$  की भुजाओं के समानान्तर हैं,  $OLN$  की भुजाओं के समानुपाती होंगी और इसलिये बलों के भी समानुपाती होंगी।

पुनः, यदि किसी त्रिभुज की भुजायें क्रमानुसार त्रिभुज  $OLN$  की भुजाओं के लम्ब हों, तो वे त्रिभुज  $OLN$  की भुजाओं की समानुपाती और इस कारण से बलों की भी समानुपाती होंगी।



३९—पिछली धारा के साध्य में हमें चित्र द्वारा उन तीन सम-  
तुलित बलों की सापेक्षिक दिशाओं को निर्णय करने की सरल रीति  
मालूम हो जाती है जिनके परिमाण दिये हुए होते हैं। हमें एक  
ऐसे त्रिभुज की रचना करनी होती है जिसकी भुजायें बलों के  
समानुपाती हैं, और ऐसा हम यूक्लेडस के १-२२ से हमेशा कर  
सकते हैं जबतक कि बलों में से किन्हीं दो का योग तीसरे से कम  
न हो।

४०—लामी का प्रमेय (Lami's Theorem). यदि एक कण पर  
कार्य करते हुये तीन बल समतुलित हों तो प्रत्येक बल शेष दो बलों के बीच के  
कोण की ज्या का समानुपाती होता है।

धारा ३८ के चित्र में मान लो बल  $P, Q$  और  $R$  समतुलित हैं।  
पहले की भांति  $OL$  और  $OM$  लम्बाइयों को बल  $P$  और  $Q$  को  
प्रदर्शित करती हुई नापो और समानान्तर चतुर्भुज  $OLNM$  को पूरा  
करो। तो  $NO, R$  को प्रदर्शित करेगा।

चूँकि त्रिभुज  $OLN$  की भुजायें सम्मुख के कोणों की ज्याओं के  
समानुपाती हैं, इसलिये

$$\frac{OL}{\text{ज्या } LNO} = \frac{LN}{\text{ज्या } LON} = \frac{NO}{\text{ज्या } OLN}.$$

परन्तु ज्या  $LNO = \text{ज्या } NOM = \text{ज्या } (180^\circ - QOR) = \text{ज्या } QOR,$

ज्या  $LON = \text{ज्या } (180^\circ - LOR) = \text{ज्या } ROP,$

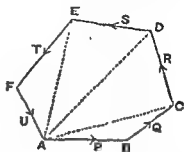
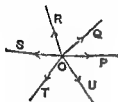
और ज्या  $OLN = \text{ज्या } (180^\circ - POQ) = \text{ज्या } POQ.$

और  $LN = OM.$

अतः  $\frac{OL}{\text{ज्या } QOR} = \frac{OM}{\text{ज्या } ROP} = \frac{ON}{\text{ज्या } POQ},$

अर्थात्  $\frac{P}{\text{ज्या } QOR} = \frac{Q}{\text{ज्या } ROP} = \frac{R}{\text{ज्या } POQ}.$

४१—बल-बहुभुज (Polygon of forces). यदि एक कण पर कार्य करते हुये कुछ बल, परिमाण और दिशाओं में किसी बहुभुज की भुजाओं से, क्रमशः प्रदर्शित किये जा सकें, तो वे समतुलित होंगे।



मान लो बहुभुज  $ABCDEF$  की भुजाये  $AB, BC, CD, DE, EF$  और  $FA$  कण  $O$  पर कार्य करते हुये बलों को प्रदर्शित करती हैं।  $AC, AD$  और  $AE$  को मिला दो।

धारा ३६ के उपसाध्य से  $AB$  और  $BC$  का परिणामीबल  $AC$  से प्रदर्शित होता है।

इसी प्रकार  $AC$  और  $CD$  का परिणामीबल  $AD$  से;  $AD$  और  $DE$  का परिणामीबल  $AE$  से; और  $AE$  और  $EF$  का परिणामीबल  $AF$  से प्रदर्शित होता है।

अतः इन सब बलों का परिणामीबल  $AF$  और  $FA$  के परिणामीबल के बराबर होगा, अर्थात् इस दशा में परिणामीबल शून्य हो जाता है।

अतः बल समतुलित है।

चाहे बल संख्या में कितने ही क्यों न हों इसी प्रकार का प्रमाण उनके लिये भी दिया जा सकता है। प्रमाण में यह भी स्पष्ट है कि यह आवश्यक नहीं है कि बहुभुज की भुजायें एक ही घरातल में हों।

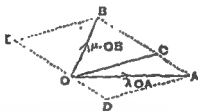
बल-बहुभुज का बिलोम सत्य नहीं है, क्योंकि यदि किसी बहुभुज की भुजाओं की दिशाएँ ज्ञात हों तो उनकी निष्पत्तियाँ नहीं मालूम होतीं। क्योंकि ऊपर के चित्र में हम भी  $AB$  पर कोई बिन्दु  $A'$  ले सकते हैं

और  $A'F'$ ,  $AF$  के समानान्तर  $EF$  को  $F'$  पर मिलते हुये खींच सकते हैं ; और इस प्रकार से खींचे गये नये बहुभुज  $A'BCDEF'$  की भुजायें बहुभुज  $ABCDEF$  की भुजाओं के क्रमशः समानान्तर होंगी परन्तु संगत भुजायें समानुपाती नहीं हैं ।

४२-एक बिन्दु  $O$  पर  $OA$  और  $OB$  दिशाओं में कार्य करते हुये और  $\lambda \cdot OA$  और  $\mu \cdot OB$  से प्रदर्शित किये गये दो बलों का परिणामीबल  $(\lambda + \mu) \cdot OC$  से प्रदर्शित होता है जहाँ पर  $C$ ,  $AB$  में कोई बिन्दु इस प्रकार है कि  $\lambda \cdot CA = \mu \cdot CB$ .

मान लो  $AB$  को  $C$  इस प्रकार विभाजित करता है कि

$$\lambda \cdot CA = \mu \cdot CB.$$



समानान्तर चतुर्भुजों  $OCAD$  और  $OCBE$  को पूरा करो ।

बल समानान्तर चतुर्भुज से बल  $\lambda \cdot OA$  उन दो बलों के बराबर हैं जो  $\lambda \cdot OC$  और  $\lambda \cdot OD$  से प्रदर्शित होते हैं ।

और बल  $\mu \cdot OB$  उन दो बलों के बराबर हैं जो  $\mu \cdot OC$  और  $\mu \cdot OE$  से प्रदर्शित होते हैं ।

अतः दोनों बल  $\lambda \cdot OA$  और  $\mu \cdot OB$  मिलकर एक बल  $(\lambda + \mu) \cdot OC$  और बल  $\lambda \cdot OD$  और  $\mu \cdot OE$  के बराबर होंगे ।

अतः,  $\lambda \cdot OA$  और  $\mu \cdot OB$  बल मिलाकर  $(\lambda + \mu) \cdot OC$  बल और  $\lambda \cdot OD$  तथा  $\mu \cdot OE$  बलों के तुल्य होंगे ।

परन्तु इनमें से (चूँकि  $\lambda \cdot OD = \lambda \cdot CA = \mu \cdot CB = \mu \cdot OE$ ) पिछले दो बल बराबर और विपरीत हैं और इमलिये नग्नतुल्य हैं ।

अतः परिणामीबल  $(\lambda + \mu) \cdot OC$  के बराबर हैं ।

उपसाध्य ।  $OA$  और  $OB$  से प्रदर्शित किये गये बलों का परिणामी-बल  $2OC$  है, जहाँ पर  $C, AB$  का मध्य बिन्दु है ।

यह इस बात से भी स्पष्ट है कि  $OC$  उस समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण  $OD$  के आधे के बराबर है जिसकी आमन्न भुजायें  $OA$  और  $OB$  हैं ।

### उदाहरणमाला ३

१। एक बिन्दु पर कार्य करते हुये तीन बल समतुलित हैं ; यदि वे एक दूसरे में  $120^\circ$  का कोण बनाते हैं तो सिद्ध करो कि वे एक दूसरे के बराबर हैं ।

यदि उनके बीच के कोण  $60^\circ$ ,  $150^\circ$  और  $150^\circ$  हैं, तो बल किस अनुपात में होंगे ?

२। एक कण पर कार्य करते हुये तीन बल समतुलित हैं ; पहले दो के बीच का कोण  $90^\circ$  का है और दूसरे और तीसरे के बीच का कोण  $120^\circ$  का है ; बलों की निष्पत्तियाँ मालूम करो ।

३। एक कण पर कार्य करते हुये तीन बल  $7P$ ,  $5P$  और  $8P$  समतुलित हैं ; ज्यामितीय रचना द्वारा तथा गणना द्वारा पिछले दो बलों के बीच का कोण मालूम करो ।

४। एक कण पर कार्य करते हुये तीन बल  $5P$ ,  $12P$  और  $13P$  समतुलित हैं ; ज्यामितीय रचना द्वारा तथा गणना द्वारा उनकी दिशाओं के बीच के कोण मालूम करो ।

५। दो बल  $2P$  और  $3P$  तीसरे बल  $4P$  में जिसकी दिशा ज्ञात है, समतुलित हैं ; ज्यामिति से उनकी दिशाएँ बताओ ।

६। त्रिभुज  $ABC$  की भुजाएँ  $AB$  और  $AC$ ,  $D$  और  $E$  पर समविभाजित होती हैं ; सिद्ध करो कि  $BE$  और  $DC$  से प्रदर्शित किये गये बलों का परिणामीबल परिमाण और दिशा में  $\frac{1}{2}$   $BC$  से प्रदर्शित होता है ।

७। कण  $P$  पर  $\lambda \cdot AP$  और  $\lambda \cdot PB$  से प्रदर्शित किये गये बल कार्य करते हैं जहाँ पर  $A$  और  $B$  दो नियत बिन्दु हैं ; सिद्ध करो कि बिन्दु  $P$  कहीं भी क्यों न हो उनका परिणामीबल परिमाण और दिशा में स्थिर है ।

८।  $ABCD$  एक समानान्तर चतुर्भुज है ; एक कण  $P$ ,  $A$  और  $C$  की ओर उन बलों से आकर्षित किया जाता है जो  $PA$  और  $PC$  के अनुपात में हैं और  $B$  और  $D$  से उन बलों से प्रतिकारित किया जाता है जो  $PB$  और  $PD$  के अनुपात में हैं ; सिद्ध करो कि  $P$  समतुलित होगा चाहे वह किसी भी स्थान में क्यों न हो ।

निम्न प्रश्नों की ज्यामितीय रचना द्वारा हल करो । हर एक प्रश्न में  $P$  और  $Q$  कोई दो बल हैं जिनके बीच का कोण  $\alpha$  है और जिनका परिणामीबल  $R$ ,  $P$  से कोण  $\theta$  बनाता है .

९।  $P=25$  पौ० भार,  $Q=20$  पौ० भार और  $\theta=35^\circ$  ;  $R$  और  $\alpha$  मालूम करो ।

१०।  $P=50$  कीलोग्राम,  $Q=60$  कीलोग्राम और  $R=70$  कीलोग्राम ;  $\alpha$  और  $\theta$  मालूम करो ।

११।  $P=30$ ,  $R=40$  और  $\alpha=130^\circ$  ;  $Q$  और  $\theta$  मालूम करो ।

१२।  $P=60$ ,  $\alpha=75^\circ$  और  $\theta=40^\circ$  ;  $Q$  और  $R$  मालूम करो ।

१३।  $P=60$ ,  $R=40$  और  $\theta=50^\circ$  ;  $Q$  और  $\alpha$  मालूम करो ।

१४।  $P=80$ ,  $\alpha=55^\circ$  और  $R=100$  ;  $Q$  और  $\theta$  मालूम करो ।

१५। एक नाव एक रस्सी से जो नाव की लम्बाई से  $20^\circ$  का कोण बनाती है, धसीटी जा रही है ; यह मानकर कि नाव पर पानी का परिणामी प्रतिबल  $R$  नाव की लम्बाई से  $40^\circ$  का कोण बनाता है ; और रस्सी का तनाव 5 हंडरवेट है, खींच कर नाव पर परिणामीबल मालूम करो यदि वह नाव की लम्बाई की दिशा में कार्य कर रहा हो ।

०१। दो बल  $120^\circ$  के कोण पर कार्य करते हैं। यदि बड़ा बल 80 से प्रदर्शित होता है और परिणामी बल छोटे पर लम्ब है, तो छोटे बल मालूम करो।

०२। यदि दो बलों में से एक दूसरे से दुगना है और उनका परिणामी बल बड़े बल के बराबर है तो बलों के बीच का कोण मालूम करो।

०३। दो बल एक कण पर एक दूसरे से समकोण बनाते हुये कार्य करते हैं ; और एक तीसरे बल से जो उनमें से एक से  $150^\circ$  का कोण बनाता है समतुलित हो जाते हैं। दोनों बलों में से बड़ा बल 3 पौ० भार के बराबर है, शेष दो बलों के मान मालूम करो।

०४। दो बलों का परिणामी बल जिनके बीच में एक समकोण का  $\frac{1}{3}$  गुना कोण है छोटे अवयव बल पर लम्ब है। बड़ा बल 30 पौ० भार के बराबर है, दूसरा अवयव बल और परिणामी बल मालूम करो।

०५। दो बलों के परिमाण 3:5 की निष्पत्ति में हैं ; और उनके परिणामी बल की दिशा छोटे बल से समकोण बनाती है ; बड़े बल और परिणामी बल के परिमाणों की तुलना करो।

०६। दो बलों का योग 18 है, और उनका परिणामी बल, जिसकी दिशा छोटे बल पर लम्ब है, 12 है, बलों के परिमाण मालूम करो।

०७। यदि दो बल  $P$  और  $Q$  एक दूसरे से ऐसा कोण बनाते हुये लगाये गये हैं कि  $R=P$ , तो सिद्ध करो कि यदि  $P$  को दुगना कर दिया जाय तो नया परिणामी बल  $Q$  पर लम्ब होगा।

०८। दो बलों  $P$  और  $Q$  का परिणामी बल  $\sqrt{3}Q$  के बराबर है और  $P$  की दिशा से  $30^\circ$  का कोण बनाता है ; सिद्ध करो कि  $P$  या तो  $Q$  के बराबर होगा या उससे दुगना होगा।

१। दो बल  $2P$  और  $P$  किसी कण पर कार्य करते हैं ;

यदि पहले बल को दुगुना कर दिया जाय और दूसरे को 12 पौं० भार से बढ़ा दिया जाय, तो परिणामीबल की दिशा नहीं बदलती ;  $P$  का मान मालूम करो ।

०१०। दो बलों  $P$  और  $Q$  का परिणामीबल, जो एक दूसरे से कोण  $\theta$  बनाते हैं,  $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$  है ; यदि वे कोण  $(90^\circ-\theta)$  बनाते हैं, तो उनका परिणामीबल  $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$  होता है ; सिद्ध करो कि स्पष्टता  $\theta = \frac{m-1}{m+1}$ ।

०११। बल  $P$  और  $Q$  का परिणामीबल  $R$  है ; यदि  $Q$  को दुगुना कर दिया जाय तो  $R$  भी दुगुना हो जाता है, और यदि  $Q$  की दिशा उलट दी जाय, तो भी  $R$  दुगुना हो जाता है ; सिद्ध करो कि

$$P:Q:R::\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$$

०१२। यदि दो बलों  $P$  और  $Q$  का परिणामीबल  $R$ , जिनके बीच में कोई भी कोण क्यों न हो,  $P$  की दिशा से कोण  $\theta$  बनता है, तो सिद्ध करो कि  $(P+R)$  और  $Q$  का परिणामीबल, जबकि उनके बीच में वही कोण है,  $(P+R)$  की दिशा से  $\frac{\theta}{2}$  कोण बनायेगा ।

१३। एक बिन्दु पर कार्य करते हुये तीन दिये हुये बल समतुलित हैं । यदि उनमें से एक उस बिन्दु के चारों ओर किसी दिये हुये कोण पर घुमा दिया जाय, तो रचना द्वारा तीनों बलों का परिणामीबल मालूम करो, और यदि बल का भुकाव बदलता जाय तो सिद्ध करो कि परिणामीबल का भुकाव बल के भुकाव के आधे में बदलेगा ।

१४। एक बल को जिसका परिमाण और दिशा दो हुई हैं, दो नियत बिन्दुओं में होकर गुजरते हुये दो बराबर बलों में विश्लिष्ट करो, और इसे ज्यामितीय रचना द्वारा दितलाओ (१) जबकि दोनों बिन्दु दिये हुये बल के एक ही ओर हैं, (२) जब वे विपरीत ओर हैं ।

०१५। दो दिये हुये बल किसी पिण्ड के दो दिये हुये बिन्दुओं पर

कार्य करते हैं ; यदि वे इन बिन्दुओं के चारों ओर एक ही दिशा में दो बराबर बराबर कोण बनाते हुये घुमाये जायें, तो सिद्ध करो कि उनका परिणामीबल हमेशा किमी नियत बिन्दु में होकर गुजरेगा ।

०१६।  $A, B$ , और  $C$  तीन नियत बिन्दु हैं, और  $P$  एक ऐसा बिन्दु है कि  $PA$  और  $PB$  का परिणामीबल हमेशा  $C$  में होकर गुजरता है ; सिद्ध करो कि  $P$  का बिन्दुपथ एक सरल रेखा है ।

१७। एक दिया हुआ बल जो एक दिये हुये बिन्दु पर किसी दो हुई दिशा में कार्य करता है दो अवयव बलों में विश्लिष्ट किया गया है । यदि अवयव बलों की सब दिशाओं के लिये, उनमें से एक अपरिवर्तित रहता है, तो सिद्ध करो कि दूसरे बल को प्रदर्शित करनेवाली रेखा का सिरा किसी नियत वृत्त पर होगा ।

०१८। सिद्ध करो कि किसी बिन्दु को एक त्रिभुज के शीर्षों को मिलाने वाली रेखाओं से प्रदर्शित किये गये बलों का समुदाय उसी बिन्दु को त्रिभुज के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखाओं से प्रदर्शित किये गये बलों के समुदाय के तुल्य होता है । ✓

०१९। एक चतुर्भुज के भीतर वह बिन्दु मालूम करो कि जिसपर यदि उससे चतुर्भुज के शीर्षों को मिलाने वाली रेखाओं से प्रदर्शित किये गये बल कार्य करें तो वह समतुलित हो । ✓

२०। चार बल चतुर्भुज  $ABCD$  की भुजाओं पर लगाये गये हैं, और वे भुजाओं के समानुपाती हैं ; तीन  $AB, BC$ , और  $CD$  की सीध में लगाये गये हैं और चौथा  $A$  से  $D$  की ओर लगाया गया है ; उनके परिणामीबल का परिमाण और दिशा मालूम करो और उस बिन्दु का स्थान मालूम करो जहाँ पर वह  $CD$  को मिलता है ।

०२१। चतुर्भुज  $ABCD$  की भुजायें  $BC$  और  $DA$  क्रमशः बिन्दु  $F$  और  $H$  पर समविभाजित होती हैं ; सिद्ध करो कि किसी कण पर कार्य करते हुये दो बलों का परिणामीबल, जो  $AB$  और  $DC$  के समानान्तर और बराबर है,  $HF$  के समानान्तर होगा और  $2.HF$  के बराबर होगा ।



०२२। चतुर्भुज  $ABCD$  की भुजायें  $AB, BC, CD$ , और  $DA$  क्रमशः  $E, F, G$ , और  $H$  पर समविभाजित होती हैं। सिद्ध करो कि किसी बिन्दु पर कार्य करते हुये बलों का परिणामीबल, जो परिमाण और दिशा में  $EG$  और  $HF$  में प्रदर्शित होते हैं, परिमाण और दिशा में  $AC$  में प्रदर्शित होगा।

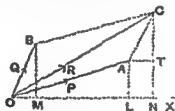
२३। एक वृत्त के भीतर, जिसका केन्द्र नियत है, किसी बिन्दु  $P$  से  $PA_1, PA_2, PA_3$ , और  $PA_4$  सरल रेखायें परिधि तक खींची गई हैं जो सब  $P$  में होकर गुजरने वाली श्रृंखला में बराबर के कोण बनाती हैं; सिद्ध करो कि यदि यह रेखायें  $P$  में विकीर्ण करते हुये बलों को प्रदर्शित करें, तो उनका परिणामीबल वृत्त की श्रृंखला के परिमाण से स्वतंत्र होगा।

## अध्याय ३

**बल-संयोजन तथा बल-विश्लेषण (क्रमशः)**

### (Composition and Resolution of Forces)

४३-किसी दी हुई दिशा में दाँ नलों के विशिष्ट भागों का योग उसी दिशा में परिणामीबल के विशिष्ट भाग के बराबर होता है।



मान लो  $OA$  और  $OB$ ,  $P$  और  $Q$  दो बलों को प्रदर्शित करती हैं, और  $OC$  उनका परिणामीबल  $R$  है, इसलिये  $OACB$  एक समानान्तर चतुर्भुज है।

मान लो  $OX$  दी हुई दिशा है।  $OX$  पर  $AL, BM$ , और  $CN$ , और  $CX$  पर  $AT$  लम्ब खींचो।

दोनों त्रिभुजों  $OBM$  और  $ACT$  की भुजाये क्रमशः समानान्तर है, और  $OB$  परिमाण में  $AC$  के बराबर है।

$$\therefore OM = AT = LV.$$

अतः  $ON = OL + LN = OL + OM$

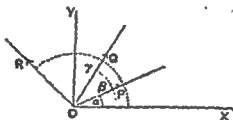
परन्तु  $OL$ ,  $OM$  और  $ON$ ,  $P$ ,  $Q$ , और  $R$  के  $OX$  दिशा में विशिष्ट भागों को प्रदर्शित करते हैं।

बतः साध्य मिद हो गया ।

इस साध्य को एक बिन्दु पर कार्य करते हुये कितने ही बलों के परिणामीबल के लिये भी सिद्ध किया जा सकता है ।

४४-एक कण पर एक ही घातल में कार्य करते हुये संख्या में कितने ही बलों का परिणामीबल मालूम करना ।

मान लो बल  $P, Q, R, \dots$  कण  $O$  पर कार्य करते हैं ।



$O$  में होकर  $OX$  एक नियत रेखा खींचो, और  $OX$  पर  $OY$  एक लम्ब रेखा खींचो ।

मान लो बल  $P, Q, R, \dots$   $OX$  से कोण  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  बनाते हैं ।

धारा ३० में बल  $P$  के दिशा  $OX$  और  $OY$  में अवयव बल, क्रमशः  $P \cos \alpha$  और  $P \sin \alpha$  हैं ; इसी प्रकार  $Q$  के अवयव बल  $Q \cos \beta$  और  $Q \sin \beta$  हैं ; इसी प्रकार और बलों के लिये भी ।

अतः सब बल  $OX$  दिशा में अवयव बल  $P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma \dots$  के, और  $OY$  दिशा में अवयव बल  $P \sin \alpha + Q \sin \beta + R \sin \gamma \dots$  के बराबर हैं ।

मान लो यह अवयव बल क्रम में  $X'$  और  $Y'$  हों, और मान लो उनका परिणामीबल  $OX$  से कोण  $\theta$  बनाता है ।

चूँकि  $F, OX$  पर  $F \cos \theta$  और  $OY$  पर  $F \sin \theta$  के बराबर हैं, इसलिये पिछली धारा में

$$F \text{ कोज्या } \theta = X \dots\dots\dots (१),$$

$$\text{और } F \text{ ज्या } \theta = Y \dots\dots\dots (२).$$

अतः वर्ग करके और जोड़ कर,

$$F^2 = X^2 + Y^2.$$

$$\text{और भाग देकर, स्पज्या } \theta = \frac{Y}{X}.$$

इन दोनों समीकरणों से  $F$  और  $\theta$  अर्थात् इष्ट परिणामीबल का परिमाण और उसकी दिशा मालूम हो जाती है।

उदाहरण १। एक कण पर एक ही घरातल में  $2, 2\sqrt{2}$ , और १ पौ० भार के तीन बल कार्य करते हैं; पहला बल क्षैतिज है, दूसरा क्षैतिज से  $45^\circ$  का कोण बनाता है, और तीसरा उर्ध्वाधर है; उनका परिणामीबल मालूम करो।

$$\text{चूँकि } X = 2 + 2\sqrt{2} \text{ कोज्या } 45^\circ + 0 = 2 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4,$$

$$\text{और } Y = 0 + 2\sqrt{2} \text{ ज्या } 45^\circ + 1 = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 3,$$

$$\text{इसलिये } F \text{ कोज्या } \theta = 4, \text{ } F \text{ ज्या } \theta = 3;$$

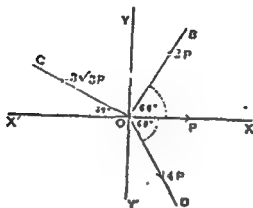
$$\therefore F = \sqrt{4^2 + 3^2} = \text{और स्पज्या } \theta = \frac{3}{4}.$$

इसलिये परिणामीबल 5 पौ० भार के बल के बराबर है, और क्षैतिज से जो कोण बनाता है उसकी स्पज्या  $\frac{3}{4}$  है, अर्थात् वह कोण  $36^\circ 52'$  का है।

उदाहरण २। एक कण पर बल  $P, 2P, 3\sqrt{3}P$ , और  $4P$  लगाये गये हैं; पहले और दूसरे के बीच का कोण दूसरे और तीसरे के बीच का कोण, और तीसरे और चौथे के बीच का कोण, क्रम से  $60^\circ, 90^\circ$  और  $150^\circ$  के हैं। सिद्ध करो कि इनका परिणामीबल  $P$  के बराबर है जो पहले बल से  $120^\circ$  का कोण बनाता है।

इस उदाहरण में यदि नियत रेखा  $OX$  को पहले बल  $P$  की दिशा की सीध में लें तो प्रश्न बहुत सरल हो जायगा। मान लो  $XOX'$  और  $YOY'$  एक दूसरे से समकोण बनाती हुई दो नियत रेखायें हैं।

दूसरा, तीसरा, और चौथा बल क्रम से पहले, दूसरे और चौथे पाद में है, और  $BOX = 60^\circ$ ,  $COX' = 30^\circ$ ; और  $DOX = 60^\circ$ .



पहले बल का  $OY$  पर कोई अवयव बल नहीं है।

दूसरा बल  $OX$  और  $OY$  पर क्रम से  $2P$  बोलगा  $(60^\circ)$  और  $2P$  ग्या  $(60^\circ)$  अवयव बलों के बराबर है।

तीसरा बल  $OX$  और  $OY$  पर क्रम से  $3\sqrt{3}P$  बोलगा  $30^\circ$  और  $3\sqrt{3}P$  ग्या  $30^\circ$  के अर्थात्  $OX$  और  $OY$  पर  $3\sqrt{3}P$  बोलगा  $30^\circ$  और  $3\sqrt{3}P$  ग्या  $30^\circ$  के बराबर है।

चौथा बल चौथा बल  $OX$  और  $OY$  पर  $4P$  बोलगा  $(60^\circ)$  और  $4P$  ग्या  $(60^\circ)$  के अर्थात्  $OX$  और  $OY$  पर  $4P$  बोलगा  $(60^\circ)$  और  $4P$  ग्या  $(60^\circ)$  के बराबर है।

अतः  $X = P + 2P$  बोलगा  $(60^\circ) + 3\sqrt{3}P$  बोलगा  $30^\circ + 4P$  बोलगा  $(60^\circ)$

$$= P + P \frac{6P}{2} + 2P = \frac{P}{2}$$

और  $Y = 0 + 2P$  ग्या  $(60^\circ) + 3\sqrt{3}P$  ग्या  $30^\circ + 4P$  ग्या  $(60^\circ)$

$$= P\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}P}{2} + 4P\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}P}{2}$$

अतः यदि परिणामीबल  $F$  है जो  $OX$  में कोण  $\theta$  बनाता है, तो

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = P,$$

और  $\theta = \frac{Y}{X} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = 60^\circ$  अर्थात्  $\theta = 120^\circ$ ,

अर्थात् परिणामीबल, बल  $P$  के बराबर है जो पहले बल की दिशा से  $120^\circ$  का कोण बनाता है।

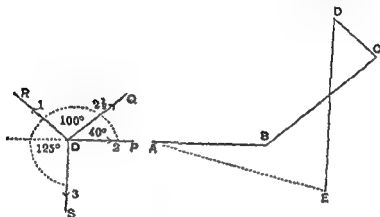
४५—लेखा-चित्रोप रचना (Graphical Construction). एक बिन्दु पर कार्य करते हुये बलों के किसी समुदाय का परिणामीबल बल-बहुभुज द्वारा भी मालूम किया जा सकता है। क्योंकि (चित्र धारा ४१) किसी बिन्दु  $O$  पर कार्य करते हुये और परिमाण और दिशाओं में बहुभुज  $ABCDEF$  की भुजाओं से प्रदर्शित किये गये बल समतुल्य होते हैं। अतः  $AB, BC, CD, DE$ , और  $EF$  में प्रदर्शित किये गये बलों का परिणामीबल शेष बल  $FA$  के बराबर और उसके विपरीत होगा अर्थात् उनका परिणामीबल  $AF$  से प्रदर्शित होगा। अर्थात् किसी कण पर कार्य करते हुये बलों  $P, Q, R, S$ , और  $T$  का परिणामीबल इस प्रकार मालूम किया जा सकता है :

कोई बिन्दु  $A$  लो और  $AB$ , बल  $P$  के समानान्तर और उसके समानुपाती लो, और इसी प्रकार क्रम में  $BC, CD, DE$ , और  $EF$  बल  $Q, R, S$  और  $T$  के समानान्तर और उनके समानुपाती लो ; बाकिष्ठन परिणामीबल परिमाण और दिशा में  $AF$  रेखा से प्रदर्शित होगा।

यही रचना मस्या में कितने ही बलों के लिये भी की जा सकती है।

उदाहरण। 2, 2½, 1, और 3 कीलोग्राम भार के चार बल सरल रेखा  $OP, OQ, OR$ , और  $OS$ , पर इस प्रकार कार्य करते हैं कि  $\angle POQ = 40^\circ$ ,  $\angle QOR = 100^\circ$ , और  $\angle ROS = 125^\circ$ ; उनके परिणामीबल का परिमाण और दिशा मालूम करें।

$AB$ ,  $OP$  के समानान्तर और 2 इंच के बराबर खींचो ;  $B$  से  $BC$ ,  $OQ$  के समानान्तर और 2.5 इंच के बराबर खींचो, और फिर  $CD$ ,  $OR$  के समानान्तर और 1 इंच के बराबर खींचो और अंत में  $DE$ ,



$OS$  के समानान्तर और 3 इंच के बराबर खींचो । नापने से मालूम हुआ कि  $AE$ , 2.99 इंच के बराबर है, और  $\angle BAE$ ,  $14^\circ$  से कुछ बड़ा है ।

अतः परिणामीबल 2.99 कीलोग्राम भार के बराबर है और  $OP$  से  $14^\circ$  का कोण बनाता है ।

### उदाहरणमाला ५

[प्रश्न २, ३, ४, ५, और ८ लेखा-चित्रादि रचना द्वारा किये जाने चाहिये ।]

०१। 1, 2, और  $\sqrt{3}$  पौ० भार के बल एक बिन्दु  $A$  पर,  $AP$ ,  $AQ$ , और  $AR$  दिशाओं में लगाये गये हैं, कोण  $PAQ = 60^\circ$ , और  $PAR$  एक समकोण है ; बलों का परिणामीबल मालूम करो ।

०२। एक कण पर 5 पौ० और 3 पौ० भार के बल जो एक दूसरे पर लम्ब हैं, और एक 4 पौ० भार का एक बल जो पहले दो बलों के बीच

के कोण को समविभाजित करता है, कार्य करते हैं ; वह बल मालूम करो जो कण को निश्चल अवस्था में रखेगा ।

३। तीन बराबर बल एक बिन्दु से अपसृत होते हैं, बीच का बल दोनों बलों से  $60^\circ$  का कोण बनाता है । तीनों बलों का परिणामीबल मालूम करो ।

०४। तीन बल  $5P, 10P$ , और  $13P$  एक धरातल में एक बिन्दु पर कार्य करते हैं, और उनमें में किन्ही दो की दिशाओं के बीच का कोण  $120^\circ$  का है । उनके परिणामीबल का परिमाण और दिशा मालूम करो ।

०५। बल  $2P, 3P$ , और  $4P$  एक बिन्दु पर कार्य करते हैं और उनकी दिशाएँ एक सम-त्रिबाहु त्रिभुज की भुजाओं के क्रमानुसार समानान्तर हैं ; उनके परिणामीबल का परिमाण और प्रयोग रेखा मालूम करो ।

६। बल  $P_1, P_2, P_3$ , और  $P_4$  एक कण पर कार्य करते हैं जो वर्ग  $ABCD$  के केन्द्र  $O$  पर हैं ;  $P_1$  और  $P_2$  विकर्ण  $OA$  और  $OB$  पर और  $P_3$  और  $P_4$  भुजाओं  $AB$  और  $BC$  की लम्बदिशा में कार्य करते हैं । यदि

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 :: 4 : 6 : 5 : 1,$$

तो उनके परिणामीबल का परिमाण और दिशा मालूम करो ।

७।  $ABCD$  एक वर्ग है ; 1 पौ०, 6 पौ० और 9 पौ० भार के बल क्रमशः  $AB, AC$ , और  $AD$  दिशाओं में कार्य करते हैं ; उनके परिणामीबल का परिमाण दशमलव के दो अंकों तक शुद्ध मालूम करो ।

०८। एक बिन्दु पर कार्य करते हुये पाँच बल समतुलित हैं ; उनमें से चार बल जो परिमाण में क्रम से 4, 4, 1 और 3 पौ० भार के बराबर हैं, एक दूसरे से लगातार  $60^\circ$  के कोण बनाते हैं । पाँचवें बल का



परिमाण मालूम करो। खींच कर और नाप कर अपने उत्तर की जांच करो।

०९। चार बराबर बल  $P, Q, R$ , और  $S$  एक घ्रातल में किमी कण पर कार्य करते हैं,  $P$  और  $Q$  के बीच के,  $Q$  और  $R$  के बीच के, और  $R$  और  $S$  के बीच के कोण सब बराबर हैं और  $P$  और  $S$  के बीच का कोण  $108^\circ$  का है। बलों का परिणामीबल मालूम करो।

०१०। २,  $\sqrt{3}$ , ५,  $\sqrt{3}$ , और २ फी० भार के बल किसी सम-षट्भुज के एक शीर्ष से क्रमशः शेष पाँच शीर्षों की ओर कार्य करते हैं; उनके परिणामीबल की दिशा और परिमाण मालूम करो।

०११। २, ३, ४, ५, और ६ फी० भार के बल एक सम-षट्भुज के एक शीर्ष से क्रमशः शेष शीर्षों की ओर कार्य करते हैं; उनका परिणामीबल मालूम करो।

०१२। निश्च करो कि ७, १, १, और ३ फी० भार के बलों का परिणामीबल जो एक सम पंचभुज के एक शीर्ष में क्रमशः शेष शीर्षों की ओर कार्य करता है,  $\sqrt{71}$  फी० भार के बराबर है। खींच कर और नाप कर अपने उत्तर की जांच करो।

०१३। बराबर बल  $P$  एक अष्टभुज के एक शीर्ष से शेष शीर्षों की ओर कार्य करते हैं; उनका परिणामीबल मालूम करो।

त्रिकोणमितीय सारिणी के प्रयोग से अथवा लेखा-चित्रीय रचना से निम्न बलों के परिणामीबल का परिमाण (दशमलव के दो अंकों तक) और दिशा (गणना द्वारा निकटतम मिनट तक और रचना द्वारा निकटतम अंश तक) मालूम करो।

१४। ११, ७, और ८ फी० भार के तीन बल जो किसी नियत रेखा से  $18^\circ 18'$ ,  $74^\circ 50'$  और  $130^\circ 20'$  के कोण बनाते हैं।

१५। ४, ३, २, और १ फी० भार के चार बल, जो किसी नियत रेखा से  $20^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $60^\circ$  और  $80^\circ$  के कोण बनाते हैं।

१६। 8, 12, 15, और 20 पी० भार के चार बल, जो किमी नियत रेखा से  $30^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $120^\circ 15'$  और  $155^\circ$ , के कोण बनाते हैं।

१७। 85, 47, और 63 कीलोग्राम के तीन बल, जो  $OA$ ,  $OB$ , और  $OC$  रेखाओं की सीध में कार्य करते हैं, जबकि  $\angle AOB = 78^\circ$  और  $\angle BOC = 125^\circ$ ।

४६—एक कण पर कार्य करते हुये संख्या में कितने ही बलों के समतुलन के नियम मालूम करना।

मान लो, जैसा कि धारा ४४ में, बल कण  $O$  पर कार्य करते हैं।

यदि बल समतुलन हैं तो उनका परिणामीबल  $F$  शून्य के बराबर होगा। इसलिये

$$X^2 + Y^2 = 0.$$

चूँकि दो वास्तविक राशियों के वर्गों का योग शून्य नहीं हो सकता जबतक कि प्रत्येक राशि पृथक् पृथक् शून्य न हो ;

$$\therefore X=0, \text{ और } Y=0.$$

अतः यदि एक कण पर कार्य करते हुये बल समतुलन हैं, तो उनके विशिष्ट भागों के बीजीय योग, दो दिशाओं में जो एक दूसरे पर लम्ब हैं, पृथक् पृथक् शून्य होंगे।

विलोमतः यदि बलों के विशिष्ट भागों के योग दो दिशाओं में, जो एक दूसरे पर लम्ब हैं, पृथक् पृथक् शून्य हैं, तो बल समतुलित होंगे।

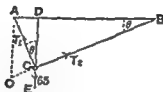
क्योंकि इस स्थिति में  $X$  और  $Y$  दोनों शून्य हैं, और इसलिये  $F$  भी शून्य होगा।

अतः चूँकि बलों का परिणामीबल शून्य है, इसलिये बल समतुलित होंगे।

४७—जब किसी कोण पर केवल तीन बल प्रयोग करते हों, तो समतुलन के नियम अधिक सरलता से लाम्बी के नियम (धारा ४०) के प्रयोग करने से मालूम हो जाते हैं।

४८। उदाहरण १। 65 पौ० भार का एक पिंड 5 और 12 फुट लम्बी दो डोरियों से लटका हुआ है; डोरियाँ एक ही क्षितिज रेखा में दो बिन्दुओं से, जिनके बीच की दूरी 13 फुट है, बंधी हुई हैं; डोरियों के तनाव मालूम करो।

मान लो  $AB$  और  $AC$  दो डोरियाँ हैं, इसलिये  $AC=5$  फुट,  $BC=12$  फुट, और  $AB=13$  फुट।



चूँकि  $13^2 = 12^2 + 5^2$ , इसलिये कोण  $ACB$  एक समकोण है।

मान लो भार की दिशा  $CE$  बढ़ाये जाने पर  $AB$  को  $D$  पर मिलती है और मान लो कोण  $CBA = \theta$ , तो

$$\angle ACD = 90^\circ - \angle BCD = \angle CBD = \theta.$$

मान लो डोरियों के तनाव  $T_1$  और  $T_2$  हैं। लाम्बी के प्रमेय से

$$\frac{T_1}{\text{ज्या } ECB} = \frac{T_2}{\text{ज्या } ECA} = \frac{65}{\text{ज्या } ACB};$$

$$\therefore \frac{T_1}{\text{ज्या } BCD} = \frac{T_2}{\text{ज्या } \theta} = \frac{65}{\text{ज्या } 90^\circ};$$

$$\therefore T_1 = 65 \text{ कोज्या } \theta, \text{ और } T_2 = 65 \text{ ज्या } \theta.$$

$$\text{परन्तु कोज्या } \theta = \frac{BC}{BA} = \frac{12}{13}, \text{ और ज्या } \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13};$$

$$\therefore T_1 = 60, \text{ और } T_2 = 25 \text{ पौ० भार।}$$

अन्यथा प्रश्न इस प्रकार भी हल किया जा सकता है : चूँकि त्रिभुज  $ACB$  की भुजाएँ क्रमशः बल  $T_1$ ,  $T_2$ , और 65 की दिशाओं पर लम्बे हैं,

$$\therefore \frac{T_1}{BC} = \frac{T_2}{CA} = \frac{65}{AB};$$

$$\therefore T_1 = 65 \frac{BC}{AB} = 60, \text{ और } T_2 = 65 \frac{AC}{AB} = 25.$$

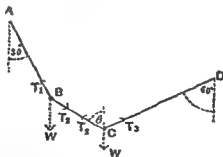
लेता-चित्र द्वारा।  $BC$  को बढ़ाओ ताकि वह  $A$  में होकर सीधी गई ऊर्ध्वाधर रेखा को  $O$  पर मिले। अब  $ACO$  वह त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ तीनों बल  $T_1$ ,  $T_2$  और  $W$  के समानान्तर हैं। अतः यह बल त्रिभुज है, और

$$\therefore \frac{T_1}{AC} = \frac{T_2}{CO} = \frac{W}{OA}.$$

उदाहरण २। एक डोरी  $ABCD$  दो नियत बिन्दुओं  $A$  और  $D$  पर बंधी हुई है। उसके दो बिन्दुओं  $B$  और  $C$  से दो बराबर भार  $W$  बंधे हुए हैं और भाग  $AB$  और  $CD$  ऊर्ध्वाधर से क्रमशः  $30^\circ$  और  $60^\circ$  के कोण बनाते हैं। डोरी के भागों के तनाव और  $BC$  को ऊर्ध्वाधर से झुकाव मालूम करो।

मान लो डोरियों के तनाव क्रम से  $T_1$ ,  $T_2$ , और  $T_3$  हैं और मान लो  $BC$  ऊर्ध्वाधर से कोण  $\theta$  बनाता है।

[नोट—डोरी  $BC$ ,  $B$  को  $C$  की ओर और  $C$  को  $B$  की ओर खींचती है, उसकी सारी लम्बाई में तनाव एक ही रहता है।]



चूँकि  $B$  समतुलित अवस्था में है, इसलिये उस पर कार्य करते हुये बलों के ऊर्ध्वाधर अवयव बल और क्षैतिज अवयव बल पृथक् पृथक् शून्य होंगे (धारा ४६)।

अतः  $T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos \theta = W \dots\dots\dots (1)$ ,

और  $T_1 \sin 30^\circ - T_2 \sin \theta = 0 \dots\dots\dots (2)$ .

इसी प्रकार, चूंकि  $C$  समतुलित अवस्था में है,

$$T_3 \cos 60^\circ + T_2 \cos \theta = W' \dots\dots\dots (3),$$

और  $T_3 \sin 60^\circ - T_2 \sin \theta = 0 \dots\dots\dots (4)$ .

(1) और (2) से,  $T_1$  का मान रखने पर,

$$\begin{aligned} W &= T_2 [\cos 30^\circ \sin \theta - \sin 30^\circ \cos \theta] \\ &= T_2 [\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta] \dots\dots\dots (5). \end{aligned}$$

और (3) और (4) से,  $T_3$  का मान रखने पर,

$$\begin{aligned} W' &= T_2 [\cos 60^\circ \sin \theta + \sin 60^\circ \cos \theta] \\ &= T_2 \left[ \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right] \dots\dots\dots (6). \end{aligned}$$

इसलिये (5) और (6) से,

$$\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta + \cos \theta ;$$

$$\therefore 2 \sin \theta = 2\sqrt{3} \cos \theta ;$$

$$\therefore \tan \theta = \sqrt{3}, \text{ अतः } \theta = 60^\circ.$$

इस मान को (5) में रखने पर,

$$W = T_2 \left[ \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right] = T_2.$$

अतः (2) से  $T_1 = T_2 \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = W \cdot \sqrt{3}$ ,

और (4) से  $T_3 = T_2 \frac{\sin \theta}{\sin 60^\circ} = T_2 = W$ .

अतः  $BC$  का ऊर्ध्वाधर में झुकाव  $60^\circ$  का है, और भार  $AB$ ,  $BC$  और  $CD$  के निकाय क्रमशः  $W\sqrt{3}$ ,  $W$  और  $W$  हैं।

## उदाहरणमाला ६

०१। दो आदमी एक भार  $14'$  को दो रस्मियों से जो भार से बँधी हुई हैं, ले जा रहे हैं ; एक रस्सी ऊर्ध्वाधर में  $45^\circ$  का कोण बनाती है और दूसरी  $30^\circ$  का ; प्रत्येक रस्मी का तनाव मालूम करो ।

०२। 2 पौ० भार का एक पिंड एक 25 इंच लम्बी डोरी द्वारा किसी नियत बिन्दु से बँधा हुआ है ; उस पर एक क्षैतिज बल  $F$  लगाया गया है, पिंड नियत बिन्दु में होकर सीधी गई ऊर्ध्वाधर रेखा में 20 इंच की दूरी पर स्थित है ;  $F$  का मान और डोरी का तनाव मालूम करो ।

०३। 130 पौ० भार का एक पिंड एक क्षैतिज कड़ी से 1 फुट 4 इंच और 5 फुट 3 इंच लम्बी दो डोरियों द्वारा लटका हुआ है, डोरियाँ कड़ी से 5 फुट 5 इंच की दूरी पर दो बिन्दुओं से बँधी हुई हैं । डोरियों के तनाव क्या हैं ?

४। 70 पौ० भार का एक पिंड 6 फुट और 8 फुट लम्बी दो डोरियों द्वारा एक क्षैतिज रेखा में 10 फुट की दूरी पर दो बिन्दुओं से लटका हुआ है ; डोरियों के तनाव मालूम करो ।

०५। 60 पौ० भार का एक पिंड 9 फुट और 12 फुट लम्बी दो डोरियों से लटका हुआ है, डोरियों के सिरे एक क्षैतिज रेखा में 15 फुट की दूरी पर दो बिन्दुओं से बँधे हुये हैं ; डोरियों के तनाव मालूम करो ।

०६। छत में लटकी हुई एक डोरी चार चार पौंड भार के तीन पिंडों को धामे हुये हैं, एक पिंड मध्य में नीचे के सिरे पर है और शेष दो उसके गिरों से बराबर की दूरी पर हैं ; डोरी के भागों के तनाव मालूम करो ।

०७। दो बराबर पिंड जिनमें से प्रत्येक का भार  $11'$  है एक पतली डोरी के सिरों पर बँधे हुये हैं, जो दीवार पर तीन कीलों के ऊपर होकर गुजरती है ; कील दीवार में एक समद्विबाहु त्रिभुज के रूप में गड़ी हुई है जिसका आधार क्षैतिज है और शीर्ष कोण  $120^\circ$  का है ; प्रत्येक कील पर दबाव मालूम करो ।

०८। एक नदी ९६ फुट चौड़ी है और एक नाव नदी के ठीक बीचोबीच सम्मुख के किनारों पर दो आदमियों द्वारा खींची जा रही है, जिनमें से हर एक 100 पौ० भार का बल लगाता है ; यदि रस्सियाँ नाव के एक ही बिन्दु पर बँधी हुई हैं और हर एक 60 फुट लम्बी है तो नाव पर परिणामी बल मालूम करो ।

९। एक डोरी के सिरों पर जो एक ही क्षैतिज घरातल में दो समानान्तर चिकने छड़ों पर होकर गुजरती है, दो समतुल्य भार बँधे हुये हैं और एक बराबर भार छड़ों के बीच में डोरी के किसी बिन्दु से बँधा हुआ है ; समुदाय को समतुल्य की स्थिति और प्रत्येक छड़ पर दबाव मालूम करो ।

०१०। एक डोरी क्षैतिज घरातल में दो बिन्दुओं से बँधी हुई है ; 27 पौ० भार के एक छल्ले पर जो डोरी पर बेंरोक सरक सकता है,  $P$  पौ० भार का एक क्षैतिज बल लगाया गया है । यदि समतुल्य अवस्था में डोरी के भाग ऊर्ध्वाधर से  $45^\circ$  और  $75^\circ$  के कोण बनाते हैं, तो  $P$  का मान मालूम करो ।

११। दो बिना भार के छल्ले एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्त पर सरकते हैं और छल्लों में होकर एक डोरी गुजरती है जिसके दोनों सिरों पर और छल्लों के बीच में किसी एक बिन्दु पर भार बँधे हुये हैं । जब छल्ले वृत्त के मध्य से ऊँचे बिन्दु से  $30^\circ$  की दूरी पर हैं तो भार समतुल्य अवस्था में है ; तीनों भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करो ।

०१२। 112 पौ० भार के दो बराबर पिंड एक डोरी से बँधे हुये हैं जो एक ही क्षैतिज घरातल में दो छोटी छोटी चिकनी खूंटियों  $A$  और  $B$  के ऊपर होकर गुजरती है ; यदि 5 पौ० भार का एक पिंड  $A$  और  $B$  के बीचोबीच डोरी में बँधा हुआ है, तो  $AB$  को 10 फुट मान कर बताओ कि यह पिंड  $AB$  की मध्य में कितने इंच नीचे उतर आएगा ।

यदि यह छोटा पिंड डोरी के किसी दूसरे बिन्दु पर बांधा जाय तो क्या होगा ?

✓ १३। 10 पौ० भार का एक पिंड 7 और 24 इंच लम्बी दो डोरियों से लटका हुआ है, जिनके दूसरे सिरे 25 इंच लम्बी एक छड़ के सिरों में बंधे हुये हैं। यदि छड़ को इस प्रकार धामा जाय कि पिंड उसके मध्य बिन्दु के ठीक नीचे हो, तो डोरियों के तनाव मालूम करो।

१४। एक भारी जंजीर, जिसके सिरों पर 10 पौ० और 16 पौ० के भार लगे हुये हैं, एक चिकनी धिरनी के ऊपर समतुलित अवस्था में लटकी हुई है; यदि जंजीर का महत्तम तनाव 20 पौ० भार के बराबर है तो जंजीर का भार मालूम करो।

✓ १५। 8 फुट 9 इंच लम्बी एक भारी जंजीर, जिसका भार 15 पौ० है और जिसके एक सिरे पर 7 पौ० का एक भार लगा हुआ है, एक चिकनी धिरनी के ऊपर समतुलित अवस्था में लटकी हुई है। जंजीर की कितनी कितनी लम्बाई दोनों ओर है ?

१६। एक पिंड, जो एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्तीय तार के ऊपर बेरोक भरकता है एक डोरी द्वारा जो लम्बाई में वृत्त की त्रिज्या के बराबर है, वृत्त के सबसे ऊँचे बिन्दु से बंधा हुआ है; डोरी का तनाव और वृत्त का प्रतिबल मालूम करो।

✓ १७। सम-चतुर्भुज के आकार के एक सम पटल का एक कोण  $120^\circ$  का है; उसके केन्द्र पर विकर्णों की सीध में लगाये गये दो बल उसे इस प्रकार धामे हुये हैं कि उसकी एक भुजा क्षैतिज रहती है; सिद्ध करो कि, यदि बल  $P$  और  $Q$  हैं, जिनमें  $P$  बड़ा है,  $P^2 = 3Q^2$ ।

१८। एक लगाम के सिरे दो चिकने बंधे हुये छत्तों के भीतर होकर गुजरते हैं, जबकि एक एक सिरा दहाने के एक एक ओर है। फिर वे दोहरा दिये जाते हैं और घोड़े के सिर के दोनों ओर नियत बिन्दुओं पर बांध दिये जाते हैं। गाड़ीवान के खिचाव  $P$  से घोड़े की जवान पर दहाने से जो दबाव पड़ता है वह मालूम करो।



०१९। बिना भार की तीन बराबर बराबर डोरियाँ एक सम-  
त्रिबाहु त्रिभुज  $ABC$  के रूप में बंधी हुई हैं और  $A$  से एक भार  
 $11'$  लटका हुआ है। यदि त्रिभुज और भार,  $B$  और  $C$  दो डोरियों से  
इस प्रकार धामे जायें कि  $BC$  क्षैतिज हो और प्रत्येक डोरी  $BC$  से  
 $135^\circ$  का कोण बनाये तो सिद्ध करो कि  $BC$  में तनाव  $\frac{11}{6} (3 - \sqrt{3})$  है।

२०। तीन बिना भार की डोरियाँ  $AC$ ,  $BC$ , और  $AB$  इस प्रकार  
बंधी हुई हैं कि वे एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाती हैं जिसका शीर्ष  $A$  है।  
यदि  $C$  में एक भार  $11'$  लटकाया जाय और  $BC$  को क्षैतिज रखते हुये  
सम्पूर्ण दो बलों से धामा जाय जो  $A$  और  $B$  पर के कोणों को  
समविभाजित करते हैं, तो  $AB$  डोरी का तनाव मालूम करो।

२१। एक बिना भार की डोरी दो बिन्दुओं से, जो एक क्षैतिज रेखा  
में नहीं है, लटकाई गई है और एक छोटे चिकने भारी छल्ले के  
भीतर होकर गुजरती है जो बिना रोक के डोरी पर सरकता है ;  
छल्ले की समतुलित अवस्था मालूम करो।

यदि छल्ला डोरी पर बिना रोक के सरकाने के बजाय किसी द्रिये  
हुये बिन्दु में बांध दिया जाय, तो वे समीकरण मालूम करो जिससे डोरी  
के दोनों भागों के तनाव की निष्पत्ति मालूम हो जाय।

२२। दीवार में एक सम पट्टभुज के चार सबसे ऊँचे शीर्षों पर चार  
खूंटियाँ गड़ी हैं (पट्टभुज के सबसे नीचे के दो शीर्ष एक ही सरल क्षैतिज रेखा  
में हैं) और इन खूंटियों के ऊपर एक पात्र,  $11'$  भार का धामे हुये, डाला  
गया है; पात्र इतना लम्बा है कि उसमें सबसे नीचे की खूंटियों पर बने हुये  
कोण समकोण हैं। डोरी का तनाव और खूंटियों पर दबाव मालूम करो।

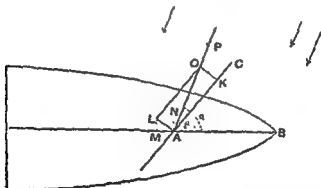
२३। ध्याख्या करो कि किम प्रकार नदी की धारा के बल को  
किसी नाव को नदी के पार करने में उत्तेजित किया जा सकता है,  
जब कि नाव के केन्द्र को एक लम्बी रस्सी द्वारा नदी के बीच में किसी  
नियत बिन्दु में बांधा हुआ मान लिया जाय।

२४। व्याख्या करो कि किम प्रकार किसी जहाज को वायु की दिशा के लगभग विपरीत दिशा में चलाने में समर्थ किया जा सकता है।

मिद करो कि जहाज के पालों को इस प्रकार खड़ा करना चाहिये कि वे जहाज के पंढे के पट्टे और वायु की प्रतीपमान दिशा के बीच के कोण को समविभाजित करें ताकि जहाज को आगे बढ़ाने को उत्तन्त्रित करने वाला बल अधिक में अधिक हो सके।

[मान लो  $AB$  पंढे के पट्टे की अर्थात् जहाज के गति की दिशा है,  $OA$  वायु की प्रतीपमान दिशा है, और कोण  $OAB$  जो न्यून कोण है  $\alpha$  के बराबर है। मान लो  $AC$  जहाज के पालों की दिशा है;  $AC$ ,  $OA$  और  $AB$  के बीच में है, और मान लो कोण  $BAC = \theta$ ।

मान लो वायु का पालों पर बल  $P$  है, इस बल को पालों की दिशा और उस की लम्ब दिशा में विद्विलष्ट करो। पालों की दिशा के अवयव बल  $(KA =) P \cos(\alpha - \theta)$  का कोई प्रभाव नहीं है।



पालों की लम्ब दिशा के अवयव बल  $(LA =) P \sin(\alpha - \theta)$  को फिर दो बलों अर्थात्  $(NA =) P \sin(\alpha - \theta) \cos \theta$  जो  $AB$  पर लम्ब है और  $(MA =) P \sin(\alpha - \theta) \sin \theta$  जो  $AB$  की ओर है, में विद्विलष्ट करो।

पहले अवयव बल से तिरछी अर्थात् जहाज की लम्बाई की लम्ब दिशा में गति उत्पन्न होती है। इसे वायु की प्रतिकूल-दिशा में जहाज का बहाव कहते हैं और यह पैदे के पटरे को बनावट से बहुत कम किया जा सकता है। पैदा इस प्रकार बनाया जाता है कि इस बहाव को अधिक से अधिक प्रतिरोध हो सके।

दूसरा अवयव बल अर्थात्  $P \cos(\alpha - \theta) \sin \theta$ , जो  $AB$  की दिशा में है, कभी शून्य नहीं होता जब तक कि पाल पटरे की दिशा में अथवा वायु की दिशा में न लगाये जायें, अर्थात् जब तक कि  $\alpha$  शून्य न हो। इस दशा में वायु जहाज की दिशा के ठीक विपरीत होती है।

इस प्रकार जहाज को आगे बढ़ाने के लिये हमेशा एक बल होता है; परन्तु वायु की जहाज को उलटा घुमाने की इस प्रवृत्ति का प्रतिकार करने के लिये पतवार का लगातार प्रयोग किया जाता है।

यह बल  $= \frac{1}{2} P [\cos(\alpha - 2\theta) - \cos \alpha]$ , और इसलिये यह सबसे अधिक होगा जब  $\cos(\alpha - 2\theta)$  महत्तम हो, अर्थात् जब  $\alpha - 2\theta = 0$ , अर्थात् जब  $\theta = \frac{\alpha}{2}$ , अर्थात् जब पालों की दिशा पटरे और वायु की प्रतीपमान दिशा के बीच के कोणों को समविभाजित करती है।]

४९—लेखा-चित्रीय उदाहरण। बहुत से प्रश्न जो वैश्लेषिक विधि से हल करने में बहुत कठिन होते हैं, लेखाचित्र द्वारा आसानी से हल किये जा सकते हैं।

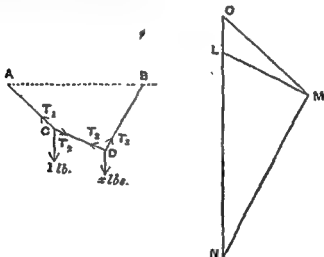
ऐसे प्रश्नों का व्यावहारिक तथा निर्माण-शास्त्र सम्बन्धी कामों में प्रायः प्रयोग होता है। प्रायः इन प्रश्नों में बल-त्रिभुज तथा बल-बहुभुज के प्रयोग के अतिरिक्त कुछ और अधिक नहीं करना होता।

इनमें जिन यन्त्रों का अधिक प्रयोग होता है वे परकार, मापनी, कर्णमापनी, और कोणों के नापने के कोणमापक हैं।

इनसे प्राप्त किये गये फल निस्सन्देह गणित के विचार से शुद्ध नहीं होते; परन्तु यदि विद्यार्थी यन्त्रों का प्रयोग सावधानी और चतुरता से करें तो साधारणतः उत्तर दशमलव के पहले अंक तक विश्वसनीय होता चाहिये।

निम्न हल किये हुये उदाहरणों में चित्र भौतिक चित्रों से छोटे करके दिये गये हैं। विद्यार्थी को चाहिये कि चित्रों को स्वयं उस पैमाने पर जो कि प्रत्येक उदाहरण में दिया गया है, फिर से खींचे।

५०—उदाहरण १।  $ACDB$  एक डोरी है जिसके सिरे एकही क्षैतिज रेखा में सात फुट की दूरी पर  $A$  और  $B$  दो बिन्दुओं से बंधे हैं।  $AC, CD$  और  $DB$  की लम्बाइयाँ क्रमसे  $3\frac{1}{2}$ , 3 और 4 फुट हैं, और  $C$  पर एक पाँड का भार लटका हुआ है।  $D$  पर ऐसे परिमाण का एक अज्ञात भार लटका हुआ है कि समतुलन की स्थिति में  $CDB$  एक समकोण है। इस भार का परिमाण और डोरियों के तनाव मालूम करो।



मान लो  $T_1, T_2$  और  $T_3$  इष्ट तनाव हैं और  $D$  पर  $x$  पौंड का भार है।

$OL$  एक इंच लम्बी ऊर्ध्वाधर रेखा लो जो  $C$  पर लटके हुये एक पौंड के भार को प्रदर्शित करती है।  $O$  से  $OM, AC$  के समानान्तर खींचो और  $L$  से  $LM, CD$  के समानान्तर खींचो।



मान लो  $T_1$  और  $T_2$  इष्ट तनाव हें।  $OC$  पर एक इंच के बराबर  $OL$  चिन्ह लगाओ जो ठोरी  $OC$  के 5 पौ० भार के तनाव को प्रदर्शित करेगा।  $LM$  ऊर्ध्वाधरतः 4 इंच के बराबर लीचों।  $M$  से  $MLN$ ,  $OB$  के समानान्तर लीचों जो  $AO$  को बढ़ाये जाने पर  $N$  पर मिले।

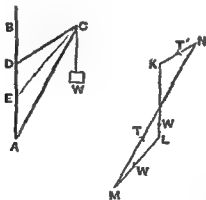
अब, बल बहुभुज से, रेखाये  $ON$  और  $MLN$  तनाव  $T_1$  और  $T_2$  को प्रदर्शित करेगी।

नापने से,  $ON$  और  $LM$  क्रम से 3.9 और 2.45 इंच लम्बी हों।

अतः  $T_1 = 5 \times 3.9 = 19.5$  पौ० भार,

और  $T_2 = 5 \times 2.45 = 12.25$  पौ० भार।

उदाहरण ३। क्रेन (Crane). क्रेन के आवश्यक अंग नीचे के चित्र में दर्शाये गये हैं।  $AB$  एक ऊर्ध्वाधर खम्भा है;  $AC$  एक कड़ी है जिसे जिव (jib) कहते हैं और जो अपने गिरे  $A$  के चारों ओर घूम सकती है; यह एक लकड़ी की छड़ अथवा जजीर  $CD$  से



रोजि टाई (tie) कहते हैं, यमी रहती है जो खम्भे के एक बिन्दु  $D$  पर लगी होती है।  $C$  पर एक घिरनी होती है जिसके ऊपर होकर एक जजीर जाती है जिसका एक सिरा उस भार से बंधा होता है जो

उठाना होता है और जिसके दूसरे सिरे  $E$  पर बल लगाया जाता है जो भार  $IV$  को उठाता है। यह सिरा साधारणतः एक बेलन के चारों ओर लिपटा रहता है। छड़  $CD$  कभी कभी झंतिज होती है और बहुधा जंजीर  $CE$  की दिशा उम पर हो होती है। ऊपर के चित्र में जब और छड़ की क्रियाओं को लेखाचित्र द्वारा इस प्रकार निकाला जा सकता है :

किसी पैमाने पर  $KL$  ऊर्ध्वाधरत  $IV$  को प्रदर्शित करती हुई खींचो, और फिर  $LM, KL$  के बराबर और  $CE$  के समानान्तर खींचो ;  $M$  से  $MN, AC$  के समानान्तर और  $KN, DC$  के समानान्तर खींचो।

अब  $C$  की समनुलित अवस्था के लिये  $KLMN$  एक बल-बहुभुज होगा, क्योंकि हम यह मान लेते हैं कि घिरनी  $C$  पर होकर गुजरने से जंजीर का तनाव नहीं बदलता और इसलिये  $CE$  का तनाव  $IV$  के बराबर होता है। अतः, यदि  $AC$  पर दबाव  $T$  है और  $CD$  पर खिचाव  $T'$  है, तो

$$\frac{T}{MN} = \frac{T'}{NK} = \frac{W}{KL}$$

अतः  $T$  और  $T'$ ,  $MN$  और  $NK$  से उसी पैमाने से प्रदर्शित होते हैं जिससे कि  $KL, IV$  को प्रदर्शित करता है।

### उदाहरणमाला ७

[ निम्न प्रश्नों को ज्यामितीय रचना द्वारा हल करो। ]

१। एक नाव नदी में दो रस्सियों द्वारा घसीटी जा रही है जो नाव के एक ही बिन्दु से बँधी हुई हैं और जिनको दो आदमी, नदी के आमने सामने के किनारों पर दो स्थानों से जिनके बीच में ५० फुट की दूरी रहती है, खींचते हैं ; एक रस्सी ३० फुट लम्बी है और उसपर ३५ पौ० भार का बल लगाया जाता है और दूसरी रस्सी ४५ फुट लम्बी है। इस प्रकार नाव समान चाल से एक सरल

रेखा में चलाई जाती है। नदी का नाव पर प्रतिरोध और दूसरी रस्सी का तनाव मालूम करो।

२। एक त्रेण का जिव 10 फुट लम्बा है, और छड़ क्षैतिज है जो जिव के पाये से 6 फुट ठीक ऊपर लगी हुई है; छड़ में तनाव और जिव पर दबाव मालूम करो जबकि त्रेण एक टन के भार को धामे हुये है।

३।  $A$  और  $B$  दो नियत बिन्दु हैं;  $B, A$  के नीचे हैं, और उनके बीच की क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दूरियाँ क्रमसे 4 फुट और 1 फुट हैं;  $AC$  और  $BC$ , 5 फुट और 3 फुट लम्बी डोरियाँ हैं, और  $C$  पर एक हंड्रेडवेट भार का पिंड बँधा हुआ है; डोरियों के तनाव मालूम करो।

४।  $ABCD$  एक हल्की डोरी है जो एक ही क्षैतिज रेखा में  $A$  और  $D$  दो बिन्दुओं से बँधी हुई है, और  $B$  और  $C$  पर भार लटके हुये हैं। समतुलित अवस्था में  $AD$  के नीचे बिन्दु  $B$  और  $C$  की दूरियाँ क्रम से 4 और 6 फुट हैं। यदि  $AB$  और  $CD$  की लम्बाइयाँ क्रम से 6 और 8 फुट हैं और  $AD$  की दूरी 14 फुट है तो  $C$  पर लटका हुआ भार मालूम करो जबकि  $B$  पर लटका हुआ भार परिमाण में 4 पौ० है।

५।  $ABC$  एक ढाँचा  $A$  और  $B$  दो आलम्बनों पर  $AB$  को क्षैतिज किये हुये ऊर्ध्वाधर घरातल में रखा हुआ है; यदि  $AB, BC$ , और  $CA$  की लम्बाइयाँ क्रमसे 10, 7, और 9 फुट हैं और 10 हंड्रेडवेट का एक भार  $C$  पर रखा हुआ है;  $A$  और  $B$  पर प्रतिबल और ढाँचे के भिन्न भिन्न भागों पर कार्य करते हुये बल मालूम करो।

६।  $ABC$  एक ढाँचा इस प्रकार थामा गया है कि  $AB$  को क्षैतिज रखते हुये वह ऊर्ध्वाधर घरातल में है, और 200 पौ० का एक भार  $C$  पर लटका हुआ है; यदि  $AB=5$  फुट  $BC=4$  फुट और  $AC=3$  फुट, तो  $AC$  और  $CB$  में तनाव अथवा दबाव, और  $A$  और  $B$  पर प्रतिबल मालूम करो।



७। एक त्रेण का जिव 20 फुट, छड़ 16 फुट, और खम्भा 10 फुट लम्बा है। 10 हंड्रेटवेट का एक भार तम जंजीर के सिरे से लटका हुआ है जो जिव के सिरे पर लगी हुई धिरनी के ऊपर होकर छड़ की मीथ में जानी है। जिव पर दबाव और छड़ पर खिंचाव मालूम करो।

८। धारा ५० के उदाहरण ३ के चित्र में छड़  $DC$  क्षैतिज है और जंजीर तम पर पड़ती है; यदि  $IV=500$  पौं०,  $AC=11$  फुट और  $DC=5$  फुट, तो  $DC$  और  $AC$  पर कार्य करने वाले बल मालूम करो।

९। धारा ५० के उदाहरण ३ के चित्र में, कोण  $CDB=45^\circ$  और कोण  $ACD=15^\circ$ ; जंजीर  $EC, DC$  पर पड़ती है; यदि  $IV$  एक टन के बराबर है, तो  $AC$  और  $CD$  पर कार्य करने वाले बल मालूम करो।

१०। धारा ५० के उदाहरण ३ के चित्र में,  $DA=15$  फुट,  $DC=20$  फुट, और  $AC=30$  फुट और एक टन का भार  $C$  में लटका हुआ है,  $AC, CD$  और  $DA$  पर दबाव अथवा तनाव मालूम करो, जबकि जंजीर (१) जिव  $AC$  (२) छड़  $CD$  पर पड़ती है।

११। धारा ५० के उदाहरण ३ के चित्र में जिव  $AC=25$  फुट, और छड़  $CD=18$  फुट,  $AD=12$  फुट और  $AE=8$  फुट;  $AC$  और  $CD$  पर दबाव अथवा तनाव मालूम करो, जबकि 2 टन का भार जंजीर के सिरे से लटका हुआ है।

१२।  $ABCD$  चार हल्की छड़ों का एक ढोना है जो एक दूसरे में ढोनी जुड़ी हुई है,  $AB$  और  $AD$  खम्बाई में चार चार फुट हैं और  $BC$  और  $CD$  दो दो फुट हैं। खम्बा  $C, A$  में 5 फुट लम्बी एक धारिक दोरी द्वारा भिन्ना दिया गया है। मो-मो पॉट के द्वारा  $D$  पर लगा दिये गये हैं और दोरी को  $A$  दिया गया है।  $AC$  पर तनाव 52 पौं० है।

१३। पिछले प्रश्न में यदि डोरी  $AC$  की जगह एक ३ फुट लम्बी हल्की छड़ ढाँचे को कड़ा रखने के लिये लगा दी जाय,  $C$  पर १०० पौ० का भार लगा दिया जाय और  $B$  और  $D$  पर कोई भी भार न लगाया जाय, तो सिद्ध करो कि छड़  $BD$  पर दबाव लगभग ७७ पौ० भार के बराबर होगा।

१४। बारहवें प्रश्न में यदि  $B$  और  $D$  पर कोई भार न हो और ढाँचे को एक चिकनी मेज पर रख दिया जाय,  $B$  और  $D$  कब्जों पर एक दूसरे की ओर पञ्चीस पञ्चीस पाउंड के दो बलों से  $BD$  सरल रेखा में दबाव डाला जाय, तो सिद्ध करो डोरी पर तनाव लगभग ३१.६ पौ० भार के बराबर होगा।

१५।  $ABCD$  एक सम-चतुर्भुज है जो एक दूसरे से ढीली जुड़ी हुई चार हल्की छड़ों में बना है, चित्र एक हल्की छड़ में, जो लम्बाई में चारों छड़ों में से प्रत्येक की आधी है और  $AB$  और  $AD$  के मध्य बिन्दुओं को मिलाती है, कड़ा कर दिया गया है। यदि यह ढाँचा  $A$  से लटकाया जाय और  $C$  पर १०० पौ० का एक भार लगा दिया जाय, तो सिद्ध करो कि शीतिज छड़ पर दबाव लगभग ११५.५ पौ० भार के बराबर है।

## अध्याय ४

### समानान्तर बल .

#### (Parallel Forces)

५१—अध्याय २ और ३ में हम बता चुके हैं कि एक बिन्दु पर कार्य करते हुये बलों का परिणामीबल किस प्रकार निकाला जाता है । इस अध्याय में हम समानान्तर बलों के संयोजन पर विचार करेंगे ।

वर्तमान जीवन में स्थिति सम्बन्धी साधारण प्रश्न बहुधा व्यवहार में आते हैं ।

दो समानान्तर बल सम कहलाते हैं जब उनकी क्रिया रेखाएँ एक ही ओर होती हैं, और विषम कहलाते हैं जब वे विपरीत होती हैं ।

५२—किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये दो समानान्तर बलों का परिणामीबल मालूम करना ।

पहली स्थिति । मान लो बल सम हैं ।

मान लो बल  $P$  और  $Q$  पिंड के दो बिन्दुओं  $A$  और  $B$  पर कार्य करते हैं, और मान लो यह  $AL$  और  $BM$  रेखाओं से प्रदर्शित होते हैं ।

$AB$  को मिला दो और  $A$  और  $B$  पर विपरीत दिशाओं में दो बराबर बल, प्रत्येक  $S$  के बराबर लगाओ, जो क्रमसे  $BA$  और  $AB$  दिशाओं में कार्य करें । मान लो यह बल  $AD$  और  $BE$  से प्रदर्शित होते हैं । चूँकि दोनों बल समतुलित हैं इसलिये पिंड की समतुलित अवस्था पर इनका कोई प्रभाव नहीं होता ।

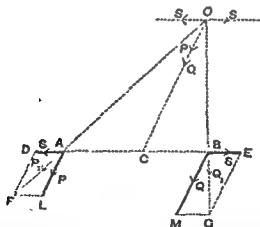
. समानान्तर चतुर्भुज  $ALFD$  और  $BMGE$  को पूरा करो ; मान लो उनके विकर्ण  $FA$  और  $GB$  बढ़ाये जाने पर  $O$  पर मिलते हैं ।  $OC$  को  $AL$  यथवा  $BM$  के समानान्तर खींचो और मान लो यह  $AB$  को  $C$  पर मिलता है ।

$A$  पर कार्य करते हुये  $P$  और  $S$  बलों का परिणामीबल  $P_1$  है, जो  $AF$  से प्रदर्शित होता है। मान लो उसका प्रयोग बिन्दु  $O$  पर ले जाया गया है।

इसी प्रकार  $B$  पर कार्य करते हुये  $Q$ , और  $S$  बलों का परिणामीबल  $Q_1$  है जो  $BG$  से प्रदर्शित होता है। मान लो उसका प्रयोग बिन्दु  $O$  पर ले जाया गया है।

$O$  पर कार्य करता हुआ बल  $P_1$  दो बलों में विश्लिष्ट किया जा सकता है, एक  $S$  जो  $AD$  के समानान्तर है और दूसरा  $P$  जो  $OC$  दिशा में कार्य करता है।

इसी प्रकार  $O$  पर कार्य करता हुआ बल  $Q_1$  दो बलों में विश्लिष्ट किया जा सकता है, एक  $S$  जो  $BE$  के समानान्तर है और दूसरा  $Q$  जो  $OC$  दिशा में कार्य करता है।



$O$  पर कार्य करते हुये ये दोनों बल  $S$  भी समतुलित होते हैं।

अतः मौलिक बल  $P$  और  $Q$ ,  $OC$  की दिशा में अर्थात्  $C$  पर  $P$  और  $Q$  की मौलिक दिशाओं के समानान्तर कार्य करते हुये एक बल  $(P+Q)$  के बराबर है।

बिन्दु  $C$  का स्थान निर्णय करना। रचना से त्रिभुज  $OCA$  त्रिभुज  $ALF$  के समरूप हैं ;

$$\therefore \frac{OC}{CA} = \frac{AL}{LF} = \frac{P}{S},$$

$$\therefore P \cdot CA = S \cdot OC \quad \dots \quad (1).$$

अब चूंकि त्रिभुज  $OCB$  और  $BMG$  समरूप हैं,

$$\therefore \frac{OC}{CB} = \frac{BM}{MG} = \frac{Q}{S},$$

$$\therefore Q \cdot CB = S \cdot OC \quad \dots \quad (2),$$

अतः (१) और (२) से

$$P \cdot CA = Q \cdot CB,$$

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P},$$

अर्थात्  $C$  रेखा  $AB$  को बलों की व्युत्क्रम निष्पत्ति में अन्तः विभाजित करता है।

दूसरी स्थिति। मान लो बल विषम हैं।

मान लो पिंड के दो बिन्दुओं  $A$  और  $B$  पर बल  $P$  और  $Q$  ( $P, Q$  से बड़ा है) कार्य करते हैं और मान लो वे  $AL$  और  $BM$  रेखाओं से प्रदर्शित होते हैं।

$AB$  को मिला दो और  $A$  और  $B$  पर विपरीत दिशाओं में दो बराबर और प्रत्येक  $S$  के बराबर बल लगाओ जो क्रम से  $BA$  और  $AB$  दिशा में कार्य करें। मान लो यह बल  $AD$  और  $BE$  से प्रदर्शित होते हैं। चूंकि दोनों बल समतुलित हैं इसलिये पिंड के समतुलन पर इनका कोई प्रभाव नहीं होता।

समानान्तर चतुर्भुज  $ALFD$  और  $BMGE$  को पूरा करो और इनके विकर्ण  $AF$  और  $GE$  को बढ़ाओ और मान लो वे  $O$  पर मिलते हैं।

[यह विकर्ण हमेशा मिलेंगे जबकि कि वे समानान्तर न हों और इस स्थिति में बल  $P$  और  $Q$  बराबर होंगे।]

$OC$  को  $AL$  अथवा  $BM$  के समानान्तर बीचो और मान लो वह  $AB$  को  $C$  पर मिलता है।

$A$  पर कार्य करने हुये  $P$  और  $S$  बलों का परिणामीबल  $P_1$  है जो  $AF$  में प्रदर्शित होता है। मान लो उसका प्रयोगबिन्दु  $O$  पर ले जाया गया है।

इसी प्रकार  $B$  पर कार्य करने हुये  $Q$  और  $S$  बलों का परिणामीबल  $Q_1$  है जो  $BG$  में प्रदर्शित होता है। मान लो इसका प्रयोग बिन्दु भी  $O$  पर ले जाया गया है।

$O$  पर कार्य करना हुआ बल  $P_1$  दो बलों में विश्लिष्ट किया जा सकता है, एक  $S$  जो  $AD$  के समानान्तर है और दूसरा  $P$  जो बड़ाई हुई  $CO$  की दिशा में कार्य करता है।



इसी प्रकार  $O$  पर कार्य करता हुआ बल  $Q_1$  दो बलों में विश्लिष्ट किया जा सकता है, एक  $S$  जो  $BE$  के समानान्तर है और दूसरा  $Q$  जो  $OC$  दिशा में कार्य करता है।

$O$  पर कार्य करते हुये यह दोनों बल  $S$  भी समतुलित होते हैं।

अतः मौलिक बल  $P$  और  $Q$  बड़ाई हुई  $CO$  दिशा में अर्थात्  $C$  पर  $P$  की दिशा के समानान्तर कार्य करते हुये एक बल  $(P-Q)$  के बराबर है।

बिन्दु  $C$  का स्थान निर्णय करना। रचना से त्रिभुज  $OCA$ , त्रिभुज  $FDA$  के समरूप हैं,

$$\therefore \frac{OC}{CA} = \frac{FD}{DA} = \frac{AL}{AD} = \frac{P}{S},$$

$$\therefore P \cdot CA = S \cdot OC \quad \dots \quad (1).$$

और चूँकि त्रिभुज  $OCB$  और  $BMG$  समरूप हैं, इसलिये

$$\frac{OC}{CB} = \frac{BM}{MG} = \frac{Q}{S},$$

$$\therefore Q \cdot CB = S \cdot OC \quad \dots \quad (2).$$

अतः (१) और (२) से,  $P \cdot CA = Q \cdot CB$ .

अतः  $\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}$ , अर्थात्  $C$  रेखा  $AB$  को बलों की व्युत्क्रम निष्पत्ति

में बाह्यः विभाजित करता है।

संक्षेप में; यदि दो समानान्तर बल  $P$  और  $Q$  किसी दृढ़ पिंड के दो बिन्दुओं  $A$  और  $B$  पर कार्य करें तो

(१) उनका परिणामीबल वह बल है जिसकी क्रिया-रेखा अवयव बलों की क्रिया-रेखाओं के समानान्तर होती है, और यदि अवयव बलें सम हैं तो परिणामीबल की दिशा वही होती है जो दोनों बलों की है, और यदि अवयव बल विषम हैं तो परिणामीबल की दिशा बड़े अवयव बल की दिशा हो जाती है।

(२) प्रयोग बिन्दु  $C$ ,  $AB$  में इस प्रकार होता है कि  $P \cdot AC = Q \cdot BC$ .

(३) परिणामीबल का परिमाण जब बल सम होते हैं तब दोनों अवयव बलों के योग के बराबर होता है, और जब बल विषम होते हैं तब उनके अन्तर के बराबर होता है।

५३—पिछली रचना के असफल होने की स्थिति। पिछली धारा के दूसरे चित्र में, यदि बल  $P$  और  $Q$  दोनों बराबर हों, तो त्रिभुज  $FDA$  और

*GEB* हर प्रकार से बराबर होंगे और इसलिये कोण *DAF* और *EBG* भी बराबर होंगे ।

इस स्थिति में *AF* और *GB* रेखाएँ समानान्तर होंगी और किसी *O* ऐसे बिन्दु पर नहीं मिलेंगी, इसलिये रचना असफल रहेगी ।

अतः कोई अकेला ऐसा बल नहीं मालूम किया जा सकता जो दो बराबर विषम समानान्तर बलों के बराबर हो ।

इस स्थिति पर हम पुनः अध्याय ६ में विचार करेंगे ।

५४—यदि किसी दृढ़ पिंड पर कुछ सम समानान्तर बल कार्य करते हैं तो हम उनका परिणामीबल धारा ५३ की बार बार प्रयोग करके मालूम कर सकते हैं । हम पहले, पहले और दूसरे बल का परिणामीबल मालूम करेंगे, फिर इस परिणामीबल का और तीसरे बल का परिणामीबल मालूम करेंगे, इत्यादि ।

अन्तिम परिणामीबल परिमाण में सब बलों के योग के बराबर होगा ।

यदि सब समानान्तर बल सम न हों, तो परिणामीबल का परिमाण सब बलों के बीजीय योग के बराबर होगा जबकि उनके पहले उपयुक्त चिन्ह लिखे हों ।

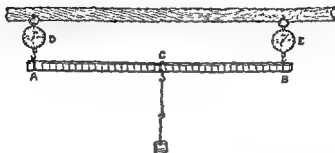
आगे (देखा धारा ११४) समानान्तर बलों के समुदाय के केन्द्र के, अर्थात् उस बिन्दु के जिसपर कि समुदाय का परिणामीबल कार्य करता है, मालूम करने का सूत्र दिया गया है ।

५५—दो समानान्तर बलों का परिणामीबल । प्रयोगात्मक जाँच । लगभग ३ फुट लम्बी लफड़ी की एक सम आयताकार कड़ी लो, जिसका अनुप्रस्थ-परिच्छेद एक इंच अथवा उससे कुछ बड़ी भुजा का एक वर्ग हो । इस कड़ी का एक फलक इंचों अथवा अर्द्ध-इंचों में अंशकित होना चाहिये जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है ।

मान लो उसके सिरे *A* और *B* स्प्रिंग तुलाओं से बाँधे गये हैं और वे दृढ़ता से नियत स्थानों पर लगा दिये गये हैं । इस प्रयोग के लिये साइटर की वृत्तीय तुला अधिक उपयुक्त है क्योंकि यह साधारण तुलाओं



की अपेक्षा खींचे जाने पर कम लटकती हैं। कड़ी  $AB$  पर हट सकनेवाला एक पाग  $C$  है जिसमें एक आँकड़ा लगा हुआ है जिसमें भार लटकाये जाते हैं। इस पाग को कड़ी पर उसकी सीध में किसी भी स्थान पर हटा सकने हैं।



भार रखने में पहले जबकि  $C, AB$  के मध्य बिन्दु पर हो तो उन परिमाणों को जो तुला  $D$  और  $E$  बतलाती हैं लिख लो, चूँकि कड़ी सम है, इसलिये ये दोनों परिमाण एक ही होंगे, मान लो वे  $R$  हैं।

अब ज्ञात भार जिनका योग  $W$  के बराबर है,  $C$  पर लटकाओ और  $C$  को कड़ी के किसी स्थान  $C_1$  पर हटा दो। अब तुला  $D$  और  $E$  में बतलाये गये नये परिमाणों को लिख लो, और मान लो वे क्रमशः  $P$  और  $Q$  हैं।

अब भार  $W$  के कारण  $P-R(=P_1)$  और  $Q-R(=Q_1)$  अधिक परिमाण हो जाते हैं, इसलिये  $D$  और  $E$  पर बल  $P_1$  और  $Q_1, C_1$  पर बल  $W$  को समतुलित करते हैं।

और यह भी मालूम हो जायगा कि  $P_1$  और  $Q_1$  का योग  $W$  के बराबर है।

अब  $AC_1$  और  $BC_1$  दूरियों को होनियारी में नापो, तो यह मालूम होगा कि

$$P_1 \times AC_1 = Q_1 \times BC_1 \quad \dots \quad (2).$$

अर्थात्  $A$  और  $B$  पर कार्य करते हुये बल  $P_1$  और  $Q_1$  का परिणामीबल  $C_1$  पर कार्य करते हुये बल  $(P_1 + Q_1)$  के बराबर है, जहाँ पर

$$P_1 \cdot AC_1 = Q_1 \cdot BC_1.$$

परन्तु यही फल धारा ५२ (पहली स्थिति) के सैद्धान्तिक अनुसंधान से भी प्राप्त हुआ है।

$C_1$  के स्थान को हटा कर और  $IV$  के मान को बिना बदले इस प्रयोग को फिर करां ;  $P_1$  और  $Q_1$  के मान बदल जायेंगे परन्तु उनका योग फिर भी  $IV$  के बराबर होगा और  $P_1 \cdot AC_1$  का नया मान  $Q_1 \cdot BC_1$  के नये मान के बराबर होगा।

इसी प्रकार धारा ५२ का नियम भी  $C_1$  के हरएक स्थान के लिये और  $IV$  के हरएक मान के लिये सही आवेगा।

संख्यात्मक उदाहरण। मान लो कड़ी और लगे हुये यन्त्र का भार (बिना भार लटकाये) २ पौ० है, तो तुलाओं से वतलाये गये प्रत्येक मौलिक परिमाण  $R$ , एक पौंड होगा।  $C$  पर ४ पौ० का भार रखो और  $C$  को  $C_1$  पर इस प्रकार हटाओ कि तुला  $A$  और  $B$  क्रम से ४ और २ पौंड के परिमाण वतलायें। तो  $C_1$  पर कार्य करता हुआ ४ पौ० का बल,  $A$  पर कार्य करते हुये ३ ( $=4-1$ ) पौ० के बल और  $B$  पर कार्य करते हुये १ ( $=2-1$ ) पौ० के बल से समतुलित होगा।

$AC_1$  और  $BC_1$  दूरियों को नापो ; यह क्रम से ९ इंच और २७ इंच होंगी (जबकि  $AB$  की लम्बाई ३ फुट अर्थात् ३६ इंच मान ली जाय)।

इसलिये  $P_1 \cdot AC_1 = 3 \times 9,$

और  $Q_1 \cdot BC_1 = 1 \times 27,$

और ये दोनों बराबर हैं।

अतः धारा ५२ (स्थिति १) इस दशा में सत्य सिद्ध हो गई।

विषम समानान्तर बल।

पिछले प्रयोग में  $A$ ,  $C_1$  और  $B$  पर कार्य करते हुये बल  $P_1$ ,  $IV$  और

$Q_1$  समतुलित हैं, इसलिये ऊपर की ओर कार्य करते हुये  $P_1$  और नीचे की ओर कार्य करते हुये  $W_1$  का परिणामीफल  $Q_1$  के बराबर और उसके विपरीत होगा।  $AB$  और  $C_1B$  दूरियां नापो तो मालूम होगा कि

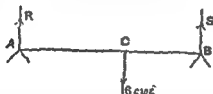
$$Q_1 = W - P,$$

और  $P_1 \cdot AB = W \cdot C_1B.$

अतः धारा ५२ (स्थिति २) की सत्यता की भी जाँच हो गई।

५६—उदाहरण। ६ फुट लम्बा एक हल्की क्षैतिज छड़ के सिरे दो आलम्बनों पर रखे हुये हैं; ६ हंड्रेडवेट के भार का एक पिंड छड़ के एक सिरे से  $2\frac{1}{2}$  फुट की दूरी पर लटकाया गया है; दोनों आलम्बनों पर प्रतिबल माप लें।

यदि एक आलम्बन केवल एक हंड्रेडवेट के ही भार के दबाव को सम्हाल सकता है, तो बताओ दूसरे आलम्बन से अधिक से अधिक वह दूरी क्या होगी जहाँ पिंड लटकाया जा सके।



मान लो  $AB$  छड़ है और  $R$  और  $S$  आलम्बनों के बिन्दुओं पर प्रतिबल है। मान लो  $C$  वह बिन्दु है जहाँ से पिंड लटकाया गया है, इसलिये  $AC = 3\frac{1}{2}$  फुट और  $CB = 2\frac{1}{2}$  फुट। समतुलित अवस्था के लिये  $R$  और  $S$  का परिणामीफल ६ हंड्रेडवेट के बराबर और विपरीत होना चाहिये।

अतः धारा ५२ में,

$$R + S = 6 \quad \dots \quad (1),$$

और  $\frac{R}{S} = \frac{BC}{AC} = \frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}} = \frac{5}{7} \quad \dots \quad (2).$

(१) और (२) को हल करके

$$R = \frac{5}{2} \text{ और } S = \frac{7}{2}.$$

अतः प्रतियोग क्रमशः  $2\frac{1}{2}$  और  $3\frac{1}{2}$  इन्चेंडवेंट के बराबर हैं।

यदि  $A$  पर प्रतियोग केवल एक इन्चेंडवेंट के बराबर हो, तो  $S$ , 5 इन्चेंडवेंट के बराबर होगा। अतः यदि  $AC, x$  के बराबर हो, तो

$$\frac{1}{5} = \frac{BC}{AC} = \frac{6-x}{x}.$$

$$\therefore x = 5 \text{ इंच.}$$

अतः  $BC$  एक इंच है।

### उदाहरणमाला C

निम्न चार प्रश्नों में  $A$  और  $B$ , समानान्तर बल  $P$  और  $Q$  के प्रयोग-बिन्दुओं को और  $C$  उस बिन्दु को जहाँ पर उनका परिणामी बल  $R, AB$  में मिलता है, सूचित करने हैं।

१। परिणामी बल का परिमाण और स्थान मापन करो (बल सम है), जबकि

(i)  $P = 4$ ;  $Q = 7$ ;  $AB = 11$  इंच,

(ii)  $P = 11$ ;  $Q = 19$ ;  $AB = 2\frac{1}{2}$  इंच;

(iii)  $P = 5$ ;  $Q = 5$ ;  $AB = 3$  इंच।

२। परिणामी बल का परिमाण और स्थान मापन करो (बल अलग हैं), जबकि

(i)  $P = 17$ ;  $Q = 23$ ;  $AB = 6$  इंच;

(ii)  $P = 23$ ;  $Q = 15$ ;  $AB = 10$  इंच;

(iii)  $P = 20$ ;  $Q = 9$ ;  $AB = 3$  इंच।

३। बल सम हैं

(i) यदि  $P = 8$ ;  $R = 17$ ;  $AC = 1\frac{1}{2}$  इंच;  $Q$  और  $AB$  मापन करो।

(ii) यदि  $Q = 11$ ;  $AC = 2$  इंच,  $AB = 2\frac{1}{2}$  इंच;  $P$  और  $R$  मापन करो।

(iii) यदि  $P = 6$ ;  $AC = 5$  इंच;  $CE = 2$  इंच;  $Q$  और  $R$  मापन करो।

४। बल विषम है,

- (i) यदि  $P=8$ ;  $R=17$ ;  $AC=4\frac{1}{2}$  इंच;  $Q$  और  $AB$  मालूम करो;
- (ii) यदि  $Q=11$ ;  $AC=-7$  इंच;  $AB=8\frac{3}{4}$  इंच;  $P$  और  $R$  मालूम करो;
- (iii) यदि  $P=6$ ;  $AC=-9$  इंच;  $AB=12$  इंच;  $Q$  और  $R$  मालूम करो।

० ५। वे दो सम समानान्तर बल मालूम करो जो एक दूसरे से 2 फुट की दूरी पर कार्य करते हैं और एक दिये हुये 20 पी० भार के बल के बराबर हैं, जबकि एक बल की क्रिया-रेखा दिये हुये बल से 6 इंच दूर है।

० ६। वे दो विषम समानान्तर बल मालूम करो जो एक दूसरे से 18 इंच की दूरी पर कार्य करते हैं और एक दिये हुये 30 पी० भार के बल के बराबर हैं, जबकि दोनों में से बड़ा बल दिये हुये बल से 8 इंच की दूरी पर लगा है।

० ७। एक पिंड के दिये हुये बिन्दुओं पर  $P$  और  $Q$  दो समानान्तर बल कार्य करते हैं; यदि  $Q$  को  $\frac{P^2}{Q}$  में बदल दिया जाय, तो सिद्ध करो कि परिमाणीबल की क्रिया-रेखा वही होगी जो बलों को केवल अदल बदल करने से होती।

० ८। दो आदमी  $1\frac{1}{2}$  हूड्डेवेट भार के एक भारी पीपे को ले जाते हैं, पीपा एक 6 फुट लम्बे हल्के डबे से लटका हुआ है जिसका एक सिरा एक आदमी के कंधे पर और दूसरा सिरा दूसरे आदमी के कंधे पर रखा हुआ है। जिस बिन्दु से पीपा लटका हुआ है वह एक आदमी से दूसरे की अपेक्षा एक फुट अधिक निकट है। हर एक कंधे पर दबाव क्या होगा?

० ९। दो आदमियों को जिनमें से एक दूसरे से अधिक बलवान है 270 पी० भार के एक पत्थर को 6 फुट लम्बे एक हल्के तख्ते

से ले जाना है ; बलवान आदमी 180 पौ० ले जा सकता है ; पत्थर किम प्रकार रखा जाय कि बलवान आदमी पर उतना ही दबाव पड़े जितना वह ले जा सकता है ?

०१०। 12 फुट लम्बा और 17 पौ० भारी एक सम दंड अपने एक बिन्दु के चारों ओर बेरोक घूम सकता है और दंड समतुलित अवस्था में तब होता है जब 7 पौ० का एक भार उसके एक सिरे पर लटका दिया जाय ; बताओ डम सिरे से वह बिन्दु कितनी दूर है जिसके चारों ओर दंड घूम सकता है ।

नोट—किसी सम दंड का भार उसके मध्य बिन्दु पर कार्य करता हुआ मानना चाहिये ।

०११। एक सीधा सम दंड 3 फुट लम्बा है ; जब 5 पौ० भार उसके एक सिरे पर रख दिया जाय तो वह इस सिरे से 3 इंच दूर एक बिन्दु पर समतुलित होता है ; दंड का भार मालूम करो ।

०१२। एक सम दंड जिसका भार 3 पौ० है और जिसकी लम्बाई 4 फुट है एक खूँटे पर रखा हुआ है और दूसरे सिरे पर एक पौंड भार के बल से, जो ऊर्ध्वाधर दिशा में लगाया गया है, क्षैतिज अवस्था में थमा हुआ है । दंड के मध्य बिन्दु से खूँटे की दूरी मालूम करो ।

०१३। 4 फुट लम्बा एक भारी सम दंड दो खूँटियों पर, जिसके बीच में एक फुट की दूरी है, क्षैतिज अवस्था में रखा हुआ है ; यदि 10 पौ० का भार एक सिरे से अथवा 4 पौ० का भार दूसरे सिरे से लटकायें तो दंड ठीक झुक जाने को होता है । दंड का भार और उसके मध्य बिन्दु से खूँटियों की दूरियाँ मालूम करो ।

०१४।  $2\frac{1}{2}$  फुट लम्बा और 8 पौ० भारी एक समदंड ऊर्ध्वाधर दीवार में दो बिन्दुओं A और B पर गड़ी हुई खूँटियों पर रखा हुआ है । A और B क्षैतिज रेखा में हैं और उनके बीच की दूरी 5 इंच है ; बताओ खूँटियों से दंड के सिरे कितने बाहर निकले हुये हैं जबकि दोनों खूँटियों के दबावों का अन्तर 6 पौ० भार के बराबर है ।

०१५। 4 फुट लम्बा एक सम दंड, दो खूंटियों पर जिनके बीच की दूरी 3 फुट है, इस प्रकार क्षैतिज अवस्था में रखा हुआ है कि दंड एक खूंटी से एक फुट बाहर निकला हुआ है ; सिद्ध करो कि एक खूंटी पर दबाव दूसरी खूंटी के दबाव में दुगना होगा ।

१६। 2 फुट लम्बी एक मीधी हल्की छड़ दो खूंटियों के बीच में जिनके बीच की दूरी 3 इंच है क्षैतिज अवस्था में रखी हुई है, एक खूंटी छड़ के एक सिरे है, पर और 5 पौ० का एक भार दूसरे सिरे से लटका हुआ है , खूंटियों पर दबाव मालूम करो ।

१७। एक भारी सम दंड का भार 14' है और उसके एक सिरे एक चिकने क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है, और दंड के दूसरे सिरे से बंधी हुई एक डोरी धरातल के ऊपर किसी नियत बिन्दु से बंधी हुई है ; डोरी का तनाव मालूम करो ।

०१८। एक आदमी एक गठरी को एक छड़ी जो उसके कंधे पर रखी हुई है, के सिरे पर, लटकाये लिये जा रहा है ; यदि उसके हाथ और कंधे के बीच की दूरी बदल दी जाय, तो बताओ उसके कंधे पर दबाव किम प्रकार बदल जायगा ।

०१९। एक आदमी 50 पौ० के एक भार को 3 फुट लम्बी एक छड़ी के सिरे पर लटकाये हुये लिये जा रहा है ; छड़ी उसके कंधे पर रखी हुई है । वह छड़ी को इस प्रकार रखता है कि उसके कंधे और हाथ के बीच की दूरी (१) 12 इंच, (२) 18 इंच, और (३) 24 इंच है ; बताओ प्रत्येक दशा में वह अपने हाथ पर कौन सा बल लगाता है , और उसके कंधे पर कितना दबाव पड़ता है ।

२०। एक क्षैतिज छड़ पर तीन समानान्तर बल कार्य करते हैं । प्रत्येक बल एक पाँच भार के बराबर है, दायीं बल ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर कार्य करता है और शेष दो ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर पहले बल में क्रमशः 2 और 3 फुट की दूरी पर कार्य करते हैं ; उनके परिणामी बल का परिमाण और स्थान मालूम करो ।

२१। एक चमड़े के सन्दूक को जिसकी लम्बाई ३ फुट और ऊँचाई ४ फुट और जिसका गुरुत्व केन्द्र उसके केन्द्र पर है, दो आदमी नीचे के हिस्से के सामने और पिछले किनारों को पकड़े हुये दूसरी मंजिल पर ले जा रहे हैं। यदि यह हिस्सा क्षैतिज से  $30^\circ$  का कोण बनाता है और सन्दूक का भार एक हट्टेडवेट है, तो बताओ प्रत्येक आदमी कितना भार सहहालता है।



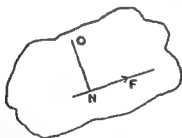
## अध्याय ५

### घूर्ण

#### (Moments)

५७—परिभाषा । एक दिये हुये बिन्दु पर किसी बल का घूर्ण बल और दिये बिन्दु से बल की क्रिया रेखा पर खींचे हुये लम्ब का गुणनफल होता है ।

जैसे, बल  $F$  का बिन्दु  $O$  पर घूर्ण  $F \times ON$  है जहाँ पर  $ON$ ,  $O$  से  $F$  की क्रिया-रेखा पर खींचा हुआ लम्ब है ।



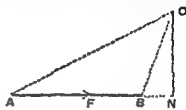
यह स्मरण रहे कि किसी दिये हुये बिन्दु पर बल  $F$  का घूर्ण कभी शून्य नहीं होता जबतक कि या तो बल  $F$  ही शून्य हो या बल दिये हुये बिन्दु से होकर जाय ।

#### ५८—घूर्ण का ज्यामितीय प्रतिदर्शन ।

मान लो बल  $F$  परिमाण और दिशा में  $AB$  रेखा से प्रदर्शित होता है । मान लो  $O$  कोई दिया हुआ बिन्दु है और  $ON$ ,  $O$  से  $AB$  अथवा  $AB$  बढ़ाई हुई पर लम्ब है ।

$OA$  और  $OB$  को मिला दो।

परिभाषा में  $O$  पर  $F$  का घूर्ण  $F \times ON$  अर्थात्  $AB \times ON$  है। परन्तु  $AB \times ON$  त्रिभुज  $OAB$  के क्षेत्रफल के दुगने के बराबर है [ क्योंकि



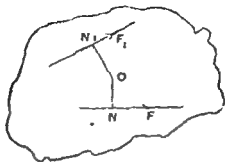
यह उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर है जिसका आधार  $AB$  है और ऊँचाई  $ON$  है ] अतः बिन्दु  $O$  पर बल  $F$  का घूर्ण त्रिभुज  $OAB$  के क्षेत्रफल के दुगने में प्रदर्शित होता है अर्थात् उस त्रिभुज के दुगने से प्रदर्शित होता है जिसका आधार बल और जिसका शीर्ष दिये हुये बिन्दु को प्रदर्शित करता है।

५९—किसी बिन्दु पर बल के घूर्ण का मौक्तिक अर्थ।

मान लो धारा ५७ के चित्र का पिंड एक सम पटल है (अर्थात् बहुत ही अल्प मोटाई का पिंड जैसे टीन की चादर अथवा पतली दफती का टुकड़ा) जो एक चिकनी मेज पर रखा हुआ है और मान लो पिंड का बिन्दु  $O$  नियत है। पिंड पर लगाये गये बल का प्रभाव यह होगा कि पिंड  $O$  केन्द्र पर घूमने लगेगा। और यह प्रभाव शून्य नहीं होगा जबतक कि (१) बल शून्य न हो, अथवा (२) बल  $F$  की क्रिया-रेखा  $O$  से होकर न गुजरे, और इस स्थिति में दूरी  $ON$  शून्य होगी। अतः गुणनफल  $F \times ON$  पिंड को  $O$  पर घुमाने की  $F$  की प्रवृत्ति का उचित माप है। इसकी जाँच इस प्रकार प्रयोग द्वारा की जा सकती है :

मान लो पटल समतुलित अवस्था में है जब उसके दो नियत बिन्दुओं पर बंधी हुई डोरियों द्वारा दो बल  $F$  और  $F_1$  जिनकी क्रिया रेखाएँ

पटल के घरातल में हैं, कार्य करते हैं। मान लो नियत बिन्दु  $O$  में  $F$  और  $F_1$  की द्रिया रेखाओं पर  $ON$  और  $ON_1$  लम्ब खींचे गये हैं।



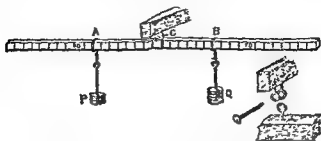
यदि हम  $ON_1$  और  $ON$  की लम्बाइयाँ और बल  $F$  और  $F_1$  के तनाव नापे, तो मालूम होगा कि गुणनफल  $F \cdot ON$  हमेशा  $F_1 \cdot ON_1$  के बराबर होगा।

अतः  $F$  और  $F_1$  दोनों बलों की पिंड को  $O$  पर घुमाने की बराबर और विपरीत प्रवृत्तियाँ होंगी यदि  $O$  पर उनके धूर्णों का परिमाण बराबर हो।

यह बल  $F$  और  $F_1$  डोरियों को हल्की चिकनी धिरनियों के ऊपर से ले जाकर और उनके सिरों पर पर्याप्त भार लटकाकर जिससे वे समतुलित अवस्था में हो जायें, नापे जा सकते हैं; अथवा डोरियों को दो स्प्रिंग तुलाओं की कटियों से बाँध कर और उनके परिमाणों को देखकर जैसा कि धारा २५ में किया गया है, दोनों बल नापे जा सकते हैं।

६०--प्रयोग विधि। सिद्ध करो कि यदि किसी पिंड पर, जिसका एक बिन्दु नियत है, दो बल कार्य करें और वह समतुलित अवस्था में रहे, तो दोनों बलों के धूर्ण नियत बिन्दु पर बराबर और विपरीत होंगे।

धारा ५५ में जिम कड़ी का प्रयोग किया गया है, मान लो वह बिन्दु  $C$  से इस प्रकार लटकाई गई है कि वह समतुलित अवस्था में



है ; यदि कड़ी सम है तो  $C$  उसका मध्य बिन्दु होगा, और यदि वह सम नहीं है तो  $C$  उसका गुरुत्व केन्द्र होगा (अध्याय ९)। छड़ को इस प्रकार लटकाना चाहिये कि वह आसानी से और बेरोंक  $C$  के चारों ओर घूम सके।

जब बल समानान्तर हैं। कड़ी के किन्हीं दो बिन्दुओं  $A$  और  $B$  से बाह्य लटकाओ और उनमें ऐसे भार रखो कि वह फिर समतुलित अवस्था में आ जाय।

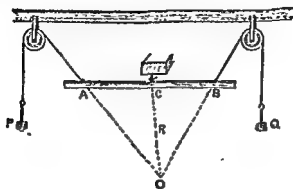
मान लो  $A$  पर बाह्य के भार सहित कुल भार  $P$  है और इसी प्रकार  $B$  पर कुल भार  $Q$  है।  $AC$  और  $BC$  दूरियों को नापो।

तो यह मालूम हो जायगा कि गुणफल  $P \cdot AC$  और  $Q \cdot BC$  आपस में बराबर हैं। इस नियम की सत्यता की जाँच, दो बलों से अधिक के लिये भी कड़ी पर इस प्रकार के कई बाह्य लटका कर और उनमें ऐसे भार रख कर कि वह समतुलित अवस्था में रहे, की जा सकती है।

प्रत्येक स्थिति में यह मालूम होगा कि  $C$  के एक ओर के भारों के घूर्णों का योगफल दूसरी ओर के भारों के घूर्णों के योगफल के बराबर है।

जब बल समानान्तर नहीं हैं। कड़ी को पहले की भाँति रखो और मान लो कि  $A$  और  $B$  पर हल्की डोरियाँ बंधी हुई हैं जो

हल्की घिरनियों के ऊपर होकर अपने सिरों पर वाहकों को धामे हुए हैं। मान लो इन वाहकों में ऐसे भार रखे हुये हैं कि कड़ी संतुल्य हैं।



मान लो वाहकों में वाहकों के भार सहित कुल भार  $P$  और  $Q$  हैं; यही  $A$  और  $B$  पर डोरियों के तनाव होंगे।

$C$  में  $OA$  और  $OB$  के लम्ब क्रम से  $p$  और  $q$  नापों तो मातृम होगा कि

$$P \cdot p = Q \cdot q.$$

६१—घन और श्रेण घूर्ण। धारा ५७ में बल  $F$ , यदि वही केवल एक मात्र बल है जो पटल पर कार्य करता है, पटल को उग दिना में घुमावेगा जिमके विपरीत घड़ी की सुइयाँ घूमती हैं जबकि घड़ी ऊपर की ओर मुड़ दिये हुये मेज पर रखी हो।

बल  $F_1$ , यदि वही केवल एक मात्र बल है जो पटल पर कार्य करता है, पटल को उग दिना में घुमावेगा जिम और घड़ी की सुइयाँ घूमती हैं।

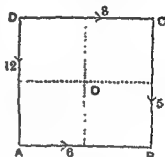
■ पर  $F$  का पूर्ण, अर्थात्  $\rightarrow$  दिना में घन बहलाना है, और  $O$  पर  $F_1$  का पूर्ण, अर्थात्  $\rightarrow$  दिना में श्रेण बहलाना है।

घूर्णों का बीत्रीय योग। किसी दिये हुये बिन्दु पर कुछ बलों के घूर्णों का बीत्रीय योग बलों के घूर्णों के योग के बराबर होता है जबकि प्रत्येक घूर्ण के पदों उचित चिन्त लगा हो।

उदाहरण ।  $ABCD$  एक वर्ग है ; उसकी भुजाओं  $AB$ ,  $CB$ ,  $DC$  और  $DA$  की सीध में क्रम से 6, 5, 8 और 12 पाँ० भार के बल कार्य करते हैं । वर्ग के केन्द्र  $O$  पर इन बलों के घूर्णों का बीजीय योग मालूम करो जबकि वर्ग की भुजा की लम्बाई 4 फुट है ।

$DA$  और  $AB$  के ऊपर कार्य करने वाले बलों की प्रवृत्ति वर्ग को घन दिशा में घुमाने की है, और  $DC$  और  $CB$  के ऊपर कार्य करने वाले बलों की प्रवृत्ति उसे ऋण दिशा में घुमाने की है ।

$O$  की प्रत्येक बल से लम्ब दूरी 2 फुट है ।



अतः बलों के घूर्ण क्रम से  $+6 \times 2$ ,  $-5 \times 2$ ,  $-8 \times 2$ , और  $+12 \times 2$  हैं । इसलिये इनका बीजीय योग  $2(6-5-8+12)$  अथवा घूर्ण की 10 इकाइयों अर्थात् एक पाँड भार के घूर्ण के जो  $O$  से एक फुट की दूरी पर कार्य करता है 10 गुने के बराबर है ।

६२—साध्य । घूर्णतल के किसी बिन्दु पर दो बलों के घूर्णों का बीजीय योग उसी बिन्दु पर उनके परिणामीबल के घूर्ण के बराबर होता है ।

पहली स्थिति । मान लो बल एक बिन्दु पर मिलते हैं ।

मान लो बिन्दु  $A$  पर कार्य करते हुये  $P$  और  $Q$  दो बल हैं और मान लो  $O$  वह बिन्दु है जिसपर घूर्ण लेने हैं ।  $OC$  को  $P$  की दिशा के समानान्तर खींचो जो  $Q$  की कार्य रेखा को बिन्दु  $C$  पर मिले ।

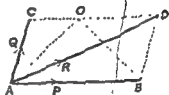
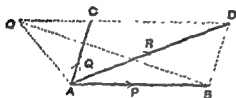
मान लो  $AC$  परिमाण में  $Q$  को प्रदर्शित करता है और उसी पैमाने पर मान लो  $AB$ ,  $P$  को प्रदर्शित करता है । समानान्तर चतुर्भुज  $ABDC$  को पूरा करो, और  $OA$  और  $OB$  को मिला दो ।

अब  $AD$ ,  $P$  और  $Q$  के परिणामीबल,  $R$  को प्रदर्शित करेगा ।

(क) मान लो बिन्दु  $O$  कोण  $DAC$  के बाहर हैं जैसा कि पहले चित्र में दिखलाया गया है, तो हमें सिद्ध करना है कि

$$2\triangle OAB + 2\triangle OAC = 2\triangle OAD.$$

[क्योंकि  $O$  पर  $P$  और  $Q$  के घूर्ण एक ही दिशा में हैं।]



चूँकि  $AB$  और  $OD$  समानान्तर हैं,

$$\therefore \triangle OAB = \triangle DAB = \triangle ACD.$$

$$\therefore 2\triangle OAB + 2\triangle OAC = 2\triangle ACD + 2\triangle OAC = 2\triangle OAD.$$

(ख) मान लो बिन्दु  $O$  कोण  $C1D$  के भीतर हैं, जैसा कि दूसरे चित्र में दिखलाया गया है, तो हमें सिद्ध करना है कि

$$2\triangle AOB - 2\triangle AOC = 2\triangle AOD.$$

[क्योंकि  $O$  पर  $P$  और  $Q$  के घूर्ण विपरीत दिशाओं में हैं।]

जैसा कि (क) में,

$$\triangle AOB = \triangle DAB = \triangle ACD.$$

$$\therefore 2\triangle AOB - 2\triangle AOC = 2\triangle ACD - 2\triangle AOC = 2\triangle AOD.$$

दूसरी स्थिति : मान लो बल समानान्तर हैं।

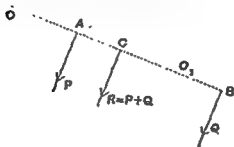
मान लो  $P$  और  $Q$  दो समानान्तर बल हैं और  $R (= P + Q)$  उनका परिणामीबल है।

उनके घगतल में किसी बिन्दु  $O$  में बलों पर  $OACB$  सम्य शीखो जो उन्हें त्रय में  $A$ ,  $C$ , और  $B$  पर मिलें।

$$\text{धारा ५२ में, } P \cdot AC = Q \cdot CB \quad \dots \quad (1);$$

$\therefore O$  पर  $P$  और  $Q$  के घूर्णों का योग

$$\begin{aligned}
 &= Q \cdot OB + P \cdot OA \\
 &= Q(OC + CB) + P(OC - AC) \\
 &= (P + Q)OC + Q \cdot CB - P \cdot AC \\
 &= (P + Q) \cdot OC, \text{ समीकरण (१) में,} \\
 &= O \text{ पर परिणामीबल का घूर्ण।}
 \end{aligned}$$



यदि बिन्दु, जैसे  $O_1$  जिसपर हमें घूर्ण मालूम करने हैं, बलों के बीच में है, तो  $P$  और  $Q$  के घूर्णों के चिन्ह विपरीत होंगे।

इस स्थिति में,  $O_1$  पर  $P$  और  $Q$  के घूर्णों का बीजीय योग

$$\begin{aligned}
 &= P \cdot O_1A - Q \cdot O_1B \\
 &= P(O_1C + CA) - Q(CB - O_1C) \\
 &= (P + Q) \cdot O_1C + P \cdot CA - Q \cdot CB \\
 &= (P + Q) \cdot O_1C, \text{ समीकरण (१) में।}
 \end{aligned}$$

ऐसी स्थिति जिसमें बिन्दु का कोई और स्थान हो अथवा जब बल समानान्तर और विपक्ष हों, विद्यार्थी के लिये स्वयं सिद्ध करने के लिये छोड़ दी गई है।

६३—पिछले माध्य की पहली स्थिति को इस प्रकार भी सिद्ध कर सकते हैं।

मान लो दो बल  $P$  और  $Q$  क्रम में  $AB$  और  $AC$  से प्रदर्शित होते हैं और मान लो  $AD$  उनके परिणामीबल  $R$  को प्रदर्शित करती है, इसलिये  $ABDC$  एक समानान्तर चतुर्भुज है।

मान लो बलों के घ्रातल में  $O$  कोई बिन्दु है।  $OA$  को मिला



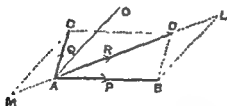
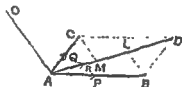
दो ओर  $BL$  और  $CM$  को  $OA$  के समानान्तर खींचो जो  $AD$  को क्रम से  $L$  और  $M$  पर मिले।

चूँकि त्रिभुज  $ACM$  की भुजाएँ क्रम से त्रिभुज  $DBL$  की भुजाओं के समानान्तर हैं, और चूँकि  $AC, BD$  के बराबर हैं,

$$\therefore AM = LD,$$

$$\therefore \triangle OAM = \triangle OLD.$$

(क) मान लो  $O$  कोण  $CAD$  के बाहर है, जैसा कि पहले चित्र में दिखलाया गया है, तो



$$\begin{aligned} & 2\triangle OAB + 2\triangle OAC \\ &= 2\triangle OAL + 2\triangle OAM \\ &= 2\triangle OAL + 2\triangle OLD \\ &= 2\triangle OAD. \end{aligned}$$

अतः  $P$  और  $Q$  के घूर्णों का योग  $R$  के घूर्ण के बराबर है।

(ख) मान लो  $O$  कोण  $CAD$  के भीतर है, जैसा कि दूसरे चित्र में दिखलाया गया है, तो  $O$  पर  $P$  और  $Q$  के घूर्णों का बीजीय योग

$$\begin{aligned} &= \triangle OAB - 2\triangle OAC \\ &= 2\triangle OAL - 2\triangle OAM \end{aligned}$$

$$= 2\triangle OAL - 2\triangle OLD$$

$$= 2\triangle OAD$$

$$= 0 \text{ पर } R \text{ का घूर्ण।}$$

६४—यदि बिन्दु  $O$  जिसपर घूर्ण मालूम करने हैं, परिणामीबल की क्रिया रेखा पर हैं, तो इस बिन्दु पर परिणामीबल का घूर्ण शून्य होगा। इस स्थिति में दिये हुये बिन्दु पर अवयव बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य होगा, अर्थात् किसी परिणामीबल की क्रिया-रेखा के किसी बिन्दु पर दो बलों के घूर्ण बराबर और चिह्न में विपरीत होते हैं।

विद्यार्थी इस साध्य को आसानी से बिना चित्र खींचे भी सिद्ध कर सकता है, क्योंकि, धारा ६२ में, बिन्दु  $O$  बिन्दु  $D$  पर पड़ेगा, और हमें केवल यही सिद्ध करना होगा कि त्रिभुज  $ACO$  और  $ABO$  परस्पर बराबर हैं, जो स्पष्टनः सत्य हैं।

६५—घूर्णों का व्याप्तिकृत नियम। यदि एक धरातल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये, संख्या में कितने ही, बलों का एक परिणामीबल है, तो उस धरातल में किसी बिन्दु पर उनके घूर्णों का बीजीय योग उनके परिणामीबल के घूर्ण के बराबर होता है।

मान लो बल  $P, Q, R, S, \dots$  हैं, और  $O$  वह बिन्दु है जिसपर घूर्ण लेने हैं।

मान लो  $P$  और  $Q$  का परिणामी बल  $P_1$  है,

$P_1$  और  $R$  का परिणामीबल  $P_2$  है,

$P_2$  और  $S$  का परिणामीबल  $P_3$  है,

इत्यादि, जबतक कि अन्तिम परिणामीबल मालूम न हो जाय।

अब  $O$  पर  $P_1$  का घूर्ण  $= P$  और  $Q$  के घूर्णों का योग (धारा ६२);

और  $O$  पर  $P$  का घूर्ण  $= P_1$  और  $R$  के घूर्णों का योग

$$= P, Q \text{ और } R \text{ के घूर्णों का योग।}$$

इसी प्रकार  $O$  पर  $P_3$  का घूर्ण  $= P_2$  और  $S$  के घूर्णों का योग  
 $= P, Q, R$  और  $S$  के घूर्णों का योग,  
 इत्यादि, जबतक कि मव बल न ले लिये जायें ।

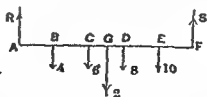
अतः अन्तिम परिणामीबल का घूर्ण  $=$  अवयव बलों के घूर्णों का बीजीय योग ।

उपसाध्य । धारा ६४ की ही भाँति दिखलाया जा सकता है कि संख्या में कितने ही बलों के परिणामीबल की क्रिया-रेखा के किसी बिन्दु पर उनके घूर्णों का बीजीय योग शून्य होता है, इसी प्रकार विलोमत्तः यदि संख्या में कितने ही बलों के घूर्णों का बीजीय योग, बलों के धरातल के किसी बिन्दु पर, शून्य हो, तो उनका परिणामीबल शून्य होता है (जिस स्थिति में बल समतुलित अवस्था में होते हैं) अथवा परिणामीबल किये दिये बिन्दु से होकर गुजरता है ।

६६—पिछली धारा के नियम में हम परिणामीबल की क्रिया रेखा पर बिन्दु मालूम कर सकते हैं, क्योंकि हमें केवल वह बिन्दु मालूम करना होता है जिसपर बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य है, और इसलिये परिणामीबल उसमें होकर जाता है । इस सिद्धान्त का अगली धारा के उदाहरण २ और ३ में प्रयोग करके दिखलाया गया है ।

यदि हमें समानान्तर बलों का कोई समुदाय मालूम हो तो परिणामीबल परिमाण और दिशा में मालूम हो जायगा यदि ऐसा कोई एक बिन्दु ज्ञात हो जाय ।

६७—उदाहरण १ । ५ फुट लम्बी एक छड़ दो ऊर्ध्वाधर टोरियो द्वारा, जो उसके मितों पर बंधी हुई है, लटकी हुई है, और उसके एक सिरे से ४, ६, ८,



और १० पाँ० के भार क्रम से १, २, ३, और ४ फुट की दूरी पर लटके हुये हैं । यदि छड़ का भार २ पाँ० है, तो टोरियो के तनाव क्या होंगे ?

मान लो  $AF$  छड़ है, और उम पर  $B, C, D$ , और  $E$  वे बिन्दु हैं जहाँ पर भार लटके हुये हैं ; मान लो  $G$  मध्य बिन्दु है ; हम यह मान लेंगे कि छड़ का भार इसी बिन्दु पर कार्य करता है ।

मान लो  $R$  और  $S$  डोरियों पर तनाव है । चूँकि बलों का परिणामी-बल शून्य है, इसलिये  $A$  पर उसका घूर्ण शून्य होगा ।

अतः धारा ६५ से  $A$  पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग भी शून्य होगा ।

$$\text{इसलिये } 4 \times 1 + 6 \times 2 + 2 \times 2\frac{1}{2} + 8 \times 3 + 10 \times 4 - S \times 5 = 0,$$

$$\therefore 5S = 4 + 12 + 5 + 24 + 40 = 85,$$

$$\therefore S = 17.$$

इसी प्रकार,  $F$  पर घूर्ण मालूम करके,

$$5R = 10 \times 1 + 8 \times 2 + 2 \times 2\frac{1}{2} + 6 \times 3 + 4 \times 4 = 65,$$

$$\therefore R = 13.$$

तनाव  $R$  दूसरी तरह भी मालूम हो सकता है । चूँकि भारों का परिणामीबल 30 पौ० भार के बराबर है, और  $R$  और  $S$  का परिणामीबल  $R+S$  के बराबर है, और ये दोनों परिणामीबल समतुलित हैं, इसलिये

$$R+S=30,$$

$$\therefore R=30-S=30-17=13.$$

उदाहरण २ । बल  $P, 2P, 3P$ , और  $4P$  वर्ग  $ABCD$  की भुजाओं के ऊपर क्रम से कार्य करते हैं ; उनके परिणामीबल का परिमाण, दिशा, और क्रिया-रेखा मालूम करो ।

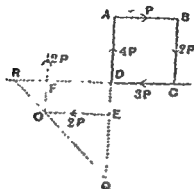
मान लो वर्ग की भुजा  $a$  है ।

धारा ५२ में, बल  $P$  और  $3P, E$  पर कार्य करते हुये समानान्तर

बल  $2P$  के बराबर है, जहाँ पर  $DE = \frac{a}{2}$ .

इसी प्रकार बल  $4P$  और  $2P, CD$  के बिन्दु  $F$  पर कार्य करते हुये एक समानान्तर बल  $2P$  के बराबर है, जहाँ पर  $DF = a$ .

मान लो इन दोनों अवयव बलों की क्रिया-रेखाएँ  $O$  पर मिलती हैं, तो अन्तिम परिणामीबल  $2P\sqrt{2}$  के बराबर है जो  $CA$  की समानान्तर दिशा में कार्य करता है।



अन्यथा इस प्रकार; ज्यामितीय रचना के बिना (जो बहुधा कठिन होती है) धारा ६५ के नियम से परिणामीबल की क्रिया-रेखा आसानी से मालूम की जा सकती है।

मान लो प्रयोग रेखा  $AD$  और  $CD$  को  $Q$  और  $R$  पर मिलती हैं।

चूँकि  $Q$  परिणामीबल की क्रिया-रेखा पर एक बिन्दु है, इसलिये  $Q$  पर चारों बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य होगा।

$$\therefore P(DQ+a)+2P(a)=3P.DQ;$$

$$\therefore DQ=\frac{3a}{2}.$$

इसी प्रकार बिन्दु  $R$  के लिये

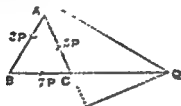
$$P.a+2P(RD+a)=4P.RD;$$

$$\therefore RD=\frac{3a}{2}.$$

और चूँकि  $CD$  के लम्ब, बलों के अवयव  $4P-2P$  अर्थात्  $2P$  है, और  $CD$  के लम्ब अवयव  $3P$  है, इसलिये परिणामीबल  $\sqrt{2P^2+2P^2}=2P\sqrt{2}$  है।

उदाहरण ३। चर  $3P$ ,  $7P$  और  $5P$  क्रमशः एक समकोण त्रिभुज  $BAC$  की भुजाओं  $AB$ ,  $BC$  और  $CA$  के ऊपर बने बने हैं; उनके परिणामी वेग का परिमाण ज्ञात करें किन्तु वेग नगण्य मानें।

मान लो त्रिभुज की भुजा  $a$  है, और मान लो परिणामी वेग  $5P$  भुजा



को  $Q$  पर मिलता है, जो धारा  $5P$  के,  $Q$  पर बलों के घूर्णन का बीजोम योग शून्य होंगे।

$$\therefore 3P \times (QC + a) \sin 60^\circ = 5P \times QC \sin 60^\circ$$

$$\therefore QC = \frac{3a}{2}$$

$BC$  के लम्ब, बलों के अवयव बलों का दोर

$$= 5P \sin 60^\circ - 3P \sin 60^\circ = P \sqrt{3}$$

और  $BC$  के ऊपर अवयव बलों का दोर

$$= 7P - 5P \cos 60^\circ = 3P \cos 60^\circ = \frac{3P}{2}$$

अतः परिणामी वेग  $P\sqrt{12}$  है जो  $BC$  से लगभग  $30^\circ$  अथवा  $30^\circ$  का कोण बनाता है और  $Q$  में गुजरता है जहाँ पर  $CQ = \frac{3}{2}BC$ .

### उदाहरणमाणा ६

१। वर्ग  $ABCD$  की भुजा ४ फुट लम्बी है;  $GE$ ,  $BA$ ,  $DE$ , और  $DB$  रेखाओं के ऊपर क्रम से ४, ३, २, और ३ पी० भार के द्रव्य बल रखे हैं;  $C$  पर बलों के घूर्णन का बीजोम योग एक फुट-पौंड के बराबर बनाम तक मापलूम करो।

२। एक सम षट्भुज  $ABCDEF$  की भुजा 2 फुट लम्बी है ;  $AB, CB, DC, DE, EF$  और  $FA$  भुजाओं के ऊपर में क्रम से 1, 2, 3, 4, 5, और 6 पौ० भार के बल कार्य करते हैं ;  $A$  पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग मालूम करो ।

✓३। २० फुट लम्बे बांस का एक सिरा क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है और एक डोरी जो उसके ऊपर के सिरे में बँधी हुई है और क्षैतिज से  $30^\circ$  का कोण बनानी है उसमें खींचती है ; डोरी का तनाव 30 पौ० भार के बराबर है । वह क्षैतिज बल मालूम करो जिसे यदि बाँस के धरातल से 4 फुट ऊँचे बिन्दु पर लगायें तो बाँस ऊर्ध्वाधर अवस्था में रुका रहेगा ।

✓४। लोहे का एक समदंड 6 फुट लम्बा है और उसका भार 9 पौ० है ; उसके सिरों में 6 और 12 पौ० के भार लटकाये गये हैं ; बताओ दंड किस बिन्दु में लटकाया जाय कि वह क्षैतिज अवस्था में रहे ?

५। एक सम कडी की लम्बाई 12 फुट है और उसका भार 50 पौ० है , उसके सिरों में 20 और 30 पौ० भार के पिंड लटकाये गये हैं , कडी को किस बिन्दु में धामा जाय कि यह समतुलित अवस्था में रहे ?

✓६। 5 फुट लम्बे एक सम दंड के एक सिरे में 1, 2, 3, और 4 फुट की दूरियों में क्रम से 1, 2, 3, और 4 पौ० के भार लटकाये गये हैं । यदि दंड का भार 4 पौ० है, तो उस बिन्दु का स्थान मालूम करो जिस पर दंड समतुलित अवस्था में रहे ।

✓७। एक सम दंड, जो लम्बाई में 4 फुट है और जिसका भार 2 पौ० है, अपने एक सिरे में एक फुट की दूरी के एक बिन्दु पर बेरोक घूम सकता है, और उस सिरे में 10 पौ० का एक भार लटकाया गया है दूसरे सिरे पर कौनसा भार रखा जाय कि दंड समतुलित अवस्था में हो जाय ?

८। एक भारी सम छड़, जो 10 फुट लम्बी है और जिसका भार 10 पौ० है, एक सिरे में 4 फुट की दूरी पर एक बिन्दु में धामी गई

है ; इस सिरे पर 6 पी० का एक भार रखा हुआ है ; दूसरे सिरे पर कौनसा भार रखा जाय कि वह समतुलित अवस्था में रहे ?

✓९। एक पुल की क्षैतिज मडक 30 फुट लम्बी और 6 टन भारी है और सिरे पर दो समान खम्भों पर थमा हुई है। प्रत्येक खम्भे पर क्या दबाव होगा जबकि 2 टन भार की एक गाड़ी (१) मडक के बीचोबीच है, (२) मडक की दो-तिहाई दूरी पर है ?

✓१०। 20 इंच लम्बा एक हल्का दंड  $AB$ , दो खूंटियों पर जिनके बीच की दूरी 10 इंच है, थमा हुआ है। वह किस प्रकार रखा जाय कि खूंटियों पर प्रतिबल बराबर हों यदि 211' और 311' के भार क्रम से  $A$  और  $B$  से लटकाये जाय ?

११। 3 फुट लम्बे एक हल्के दंड पर एक सिरे से 9 इंच की दूरी पर और दूसरे सिरे से 15 इंच की दूरी पर दो बराबर भार लगे हुये हैं; यदि उसे उसके मिरों पर बँधी हुई दो ऊर्ध्वाधर डोरियों से थामा जाय और यदि डोरियाँ एक हन्ड्रेडवेट में अधिक तनाव नहीं सम्हाल सकती हों तो बराबर भारों का परिमाण अधिक से अधिक क्या होगा ?

✓१२। एक भारी सम छड़, जिसका भार 40 पी० है, क्षैतिज अवस्था में दो ऊर्ध्वाधर डोरियों से जिनमें से प्रत्येक 33 पी० भार तक सम्हाल सकती है, लटकी हुई है। छड़ के मध्य बिन्दु से कितनी दूर 20 पी० का भार रखा जाय कि एक डोरी ठीक टूट जाय ?

✓१३। 10 फुट लम्बा एक सम दंड  $AB$  जिसका भार 50 पी० है भूमि पर रखा हुआ है। यदि  $B$  से 3 फुट की दूरी पर उसके किसी बिन्दु पर 100 पी० का भार रखा जाय, तो बताओ कि  $A$  मिरे पर कौनसा ऊर्ध्वाधर बल लगाया जाय कि वह उस सिरे को ठीक उठा सके।

✓१४। 16 इंच लम्बा एक दंड दो खूंटियों पर जिनके बीच की दूरी 9 इंच है रखा हुआ है, दंड का केन्द्र दोनों खूंटियों के बीचोबीच है। समतुलित अवस्था को बिना नष्ट किये बड़े से बड़े भार जो क्रम में दोनों



होना है और उसकी त्रिज्या-रेखा  $BC$  को  $2:1$  की निष्पत्ति में विभाजित करती है ।

२७। तीन बल एक त्रिभुज की भुजाओं के ऊपर कार्य करते हैं ; सिद्ध करो कि, यदि दो बलों का योग परिमाण में तीसरे बल के बराबर और दिशा में उसके विपरीत हो, तो तीनों बलों का परिणामीबल त्रिभुज के अन्त-वृत्त के केन्द्र में होकर गुजरता है ।

✓२८। बिजली के एक खम्भे के चारों ओर गुजरता हुआ बिजली का तार शैतिज है और उसके दो भाग जो खम्भे में बंधे हुये हैं एक दूसरे में  $60^\circ$  का कोण बनाते हैं । खम्भा एक तार में यथा हुआ है जो उसके मध्य-बिन्दु से बंधा हुआ है और क्षैतिज में  $60^\circ$  का कोण बनाता है ; सिद्ध करो कि इस तार का ननाव बिजली के तार के ननाव में  $4\sqrt{3}$  गुना है ।

✓२९। एक खम्भे के आधार से किस ऊँचाई पर एक दी हुई लम्बाई की रस्सी का सिरा बाँधा जाय कि भूमि पर खड़ा हुआ एक आदमी जो उसके दूसरे सिरे को किसी दिये हुये बल में खींचता है, खम्भे को उलट देने में अधिक में अधिक प्रभाव डाल सके ?

३०। एक बल का परिमाण और दो दिये हुये बिन्दुओं पर उसके घूर्णं ज्ञात है । ज्यामितीय रचना द्वारा उसकी त्रिज्या-रेखा मान्य करो ।

३१। किसी घरातल में उन सब बिन्दुओं का बिन्दुपथ मान्य करो जिनमें से किसी एक पर दो बलों के, जिनके परिमाण और स्थान दिये हुये हैं, घूर्णं एक ही दिशा में और आपस में बराबर हों ।

३२।  $AB$  एक वृत्त का व्यास है और  $BP$  और  $BQ$  उसकी दो परस्पर लम्ब जीवायें हैं ; सिद्ध करो कि  $A$  पर  $BP$  और  $BQ$  में प्रदर्शित किये गये बलों के घूर्णं बराबर हैं ।

३३। एक माइकिल चरानेवाला, जिसका भार 150 पौं० है, अपना भार भार एक पैडिल पर रखता है जबकि शैत क्षैतिज अवस्था में है और माइकिल आगे बढ़ने में रुक जाती है । यदि शैत की लम्बाई 6 इंच है और जंजीर के पहिये की त्रिज्या 4 इंच है, तो जंजीर का ननाव मान्य करो ।

## अध्याय ६

### बलयुग्म

(Couples)

६८—परिभाषा । दो बराबर समानान्तर बल, जिनकी क्रिया-रेखाएँ एक ही सीध में नहीं हैं, एक बलयुग्म की रचना करते हैं ।

दोनों बलों की क्रिया-रेखाओं के बीच की लम्ब दूरी को बलयुग्म की भुजा कहते हैं, अर्थात् उस लम्ब को जो बलों में से किसी एक की क्रिया-रेखा के किसी बिन्दु से दूसरे बल की क्रिया-रेखा पर डाला गया है । जैसे, बलयुग्म  $(P, P)$  की भुजा  $AB$  है ।

बलयुग्म का घूर्ण बलयुग्म के एक बल और उसकी भुजा का गुणनफल होता है ।

चित्र में बलयुग्म का घूर्ण  $P \times AB$  है ।

बलयुग्म के उदाहरण हैं ऐसे बल जो स्कू-ब्रेम के हैंडिल पर, चाबी लगाते समय घड़ी की चाबी पर, अथवा दरवाजा खोलने समय हाथों से दस्तों पर लगाये जाते हैं ।

कुछ लेखक बलयुग्म को घूर्णक (Torque) कहते हैं और कुछ घूर्णक को बलयुग्म के घूर्ण से सूचित करते हैं ।

६९—साध्य । किसी बिन्दु पर एक बलयुग्म के दोनों बलों के बलयुग्म के घ्रातल के घूर्णों का बीजीय योग स्थिर होता है और बलयुग्म के घूर्ण के बराबर होता है ।

मान लो बलयुग्म के दोनों बलों में से  $P$  के बराबर है, और मान लो उनके घ्रातल में  $O$  कोई बिन्दु है ।





हुये  $P$  और  $Q$  के परिणामीबल की क्रिया-रेखा पर हैं, इसलिये  $OO'$  इस परिणामीबल को दिशा है।

इसी प्रकार  $O'$  पर कार्य करते हुये बल  $P$  और  $Q$  के परिणामीबल  $O'O$  दिशा में है।

ये दोनों परिणामीबल परिमाण में बराबर हैं; क्योंकि  $O$  पर कार्य करते हुये बल और  $O'$  पर कार्य करते हुये बल बराबर हैं और बराबर के ही कोण बनाते हैं।

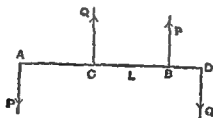
अतः ये दोनों परिणामीबल एक दूसरे के प्रभाव को नष्ट करते हैं और इसलिये चारों बलों से रचे हुये दोनों बलयुग्म समतुलित हैं।

दूसरी स्थिति। मान लो बलयुग्मों के बल सब समानान्तर हैं, और मान लो कोई मरल रेखा, जो उनकी दिशाओं पर लम्ब है, उन्हें  $A, B, C$ , और  $D$  बिन्दुओं पर मिलती है, जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है, इसलिये, चूँकि उनके घूर्ण बराबर हैं,

$$P \cdot AB = Q \cdot CD \quad \dots \dots (1).$$

मान लो  $C$  पर कार्य करते हुये  $Q$ , और  $B$  पर कार्य करते हुये  $P$  बलों के परिणामीबल का प्रयोग-बिन्दु  $L$  है, तो

$$P \cdot BL = Q \cdot CL \quad (\text{धारा ५२}) \quad \dots \dots (2).$$



(२) को (१) से घटाने पर

$$P \cdot AL = Q \cdot LD,$$

इसलिये  $A$  पर कार्य करते हुये  $P$ , और  $D$  पर कार्य करते हुये  $Q$  बलों के परिणामीबल का प्रयोग-बिन्दु भी  $L$  है।

परन्तु इन दोनों परिणामीबलों में से प्रत्येक का परिमाण  $(P+Q)$  है, और उनकी दिशाये विपरीत हैं, अतः वे समतुलित हैं।

इसलिये चारों बलों से रचे हुये दोनों बलयुग्म समतुलित हैं।

७१—चूँकि एक ही धरातल में दो बलयुग्म, जिनके घूर्ण बराबर परन्तु विरुद्ध हैं, समतुलित होते हैं ; इसलिये उनमें से किसी एक बलयुग्म के बलों की दिशाओं को उल्टा करने से हम यह परिणाम निकालते हैं कि एक धरातल में कोई दो बलयुग्म जिनके घूर्ण बराबर हैं बराबर होते हैं।

इसमें यह भी परिणाम निकलता है कि दो सम बलयुग्म जिनके घूर्ण बराबर हैं एक दूसरे दुगने घूर्ण के बलयुग्म के बराबर होते हैं।

७२—साध्य। एक धरातल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये संख्या में कितने ही बलयुग्म एक मात्र बलयुग्म के बराबर होते हैं जिसका घूर्ण बलयुग्मों के घूर्णों के बीजीय योग के बराबर होता है।

मान लो बलयुग्मों के बल  $(P, P)$  जिनकी भुजा  $p$  है,  $(Q, Q)$  जिसकी भुजा  $q$  है,  $(R, R)$  जिनकी भुजा  $r$  है, इत्यादि हैं। बलयुग्म  $(Q, Q)$  के स्थान पर उस बल को प्रतिष्ठित करो जिनके अवयव बलों की क्रिया-रेखाये वही हैं जो बल  $(P, P)$  की हैं। इस बलयुग्म के प्रत्येक बल का परिमाण  $X$  होगा, जहाँ पर  $X \cdot p = Q \cdot q$ , (धारा ७१), इसलिये

$$X = Q \frac{q}{p}.$$

इसी प्रकार बलयुग्म  $(R, R)$  के स्थान पर बलयुग्म  $\left(R \frac{r}{p}, R \frac{r}{p}\right)$  प्रतिष्ठित किया जा सकता है, जिसके बल उसी दिशा में कार्य करते हैं जिसमें बल  $(P, P)$ ।

इसी प्रकार से और बलयुग्मों के स्थान भी किया जा सकता है।

अतः सब बलयुग्म उस एक बलयुग्म के बराबर हैं जिसका प्रत्येक बल

$$P + Q \frac{q}{p} + R \frac{r}{p} + \dots \text{ है और जिनकी भुजा } p \text{ है।}$$

इस वल्युग्म का घूर्ण

$$\left( P + Q \frac{q}{p} + R \frac{r}{p} + \dots \right) \cdot p,$$

अर्थात्  $P \cdot p + Q \cdot q + R \cdot r + \dots$  है ।

अतः मौलिक वल्युग्म एकमात्र वल्युग्म के बराबर है, जिसका घूर्ण उनके घूर्णों के योग के बराबर है ।

यदि सब अवयव वल्युग्मों के चिन्ह समान न हों तो हमें हर एक का उचित चिन्ह रखना चाहिये, और यही प्रमाण उसके लिये भी होगा ।

### उदाहरणमाला १०

१।  $ABCD$  एक वर्ग है जिसकी भुजा २ फुट है;  $AB, BC, CD$  और  $DA$  के ऊपर १, २, ४, और ५ पौ० भार के बल और  $AC$  और  $DB$  के ऊपर  $5\sqrt{2}$  और  $2\sqrt{2}$  पौ० भार के बल कार्य करते हैं; सिद्ध करो कि वे एक वल्युग्म के बराबर हैं जिसका घूर्ण १६ फुट-पौ० भार के बराबर है ।

२। वर्ग  $ABCD$  की भुजा  $AB$  और  $CD$  के ऊपर दो दो पाँच भार के बल और  $AD$  और  $CB$  के ऊपर पाँच पाँच पाँच भार के बल कार्य करते हैं; यदि वर्ग की भुजा ३ फुट लम्बी है, तो उस वल्युग्म का घूर्ण मालूम करो जो उन्हें समतुलित अवस्था में कर देगा ।

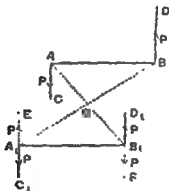
✓ ३।  $ABCDEF$  एक सम षट्भुज है; भुजा  $AB, CB, DE$ , और  $FE$  के ऊपर क्रम से ५, ११, ५, और ११ पौ० भार के बल और  $CD$  और  $FA$  के ऊपर प्रत्येक  $x$  पौ० भार के बल कार्य करते हैं।  $x$  का मान मालूम करो यदि बल समतुलित हैं ।

४।  $AB$  एक हल्का क्षैतिज दंड है,  $A$  पर ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर १ पौ० भार का बल,  $B$  पर ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर १ पौ० भार का बल और उसके किसी दिये हुये बिन्दु  $C$  पर  $C$  नीचे की ओर दंड

से  $30^\circ$  का कोण बनाते हुये 5 पौ० भार का बल कार्य करते हैं। बताओ दंड के किस बिन्दु पर एक बल लगाया जाय जो इनको समतुलित अवस्था में रक्के, और उसका परिमाण और दिशा भी मालूम करो।

७३—साध्य। यदि कोई बलयुग्म अपने घरातल से किसी समानान्तर घरातल में हम प्रकार स्थानान्तरित कर दिया जाय कि उसकी भुजा अपनी मौलिक दिशा के समानान्तर रहे तो बलयुग्म के दृढ़ पिंड पर प्रभाव में कोई परिवर्तन नहीं होता।

मान लो बलयुग्म के बल  $(P, P)$ , भुजा  $AB$  और उनके बलों की क्रिया-रेखाये  $AC$  और  $BD$  हैं।



मान लो  $A_1B_1$ ,  $AB$  के बराबर और समानान्तर हैं।

$A_1C_1$  और  $B_1D_1$  क्रम से  $AC$  और  $BD$  के समानान्तर सीधों।

$A_1$  पर दो बराबर और विपरीत बल प्रत्येक  $P$  के बराबर, लगाओ, जो  $A_1C_1$  दिशा तथा विपरीत दिशा  $A_1E$  में कार्य करते हों।

इसी प्रकार  $B_1$  पर दो बराबर और विपरीत बल, प्रत्येक  $P$  के

बराबर, लगाओ जो  $B_1D_1$  दिशा तथा विपरीत दिशा  $B_1F$  में कार्य करते हों ।

इन बलों का पिंड के समतुलन पर कोई प्रभाव नहीं होगा ।

$AB_1$  और  $A_1B$  को मिला दो और मान लो यह  $O$  पर मिलती है ; तो,  $O, AB_1$  और  $A_1B$  दोनों का मध्य-बिन्दु है ।

$B$  पर कार्य करते हुये बल  $P$  और  $A_1E$  के ऊपर कार्य करते हुये बल  $P$  का परिणामीबल  $2P$  होगा जो  $BD$  के समानान्तर  $O$  पर कार्य करेगा ।

$A$  पर कार्य करते हुये बल  $P$  और  $B_1F$  के ऊपर कार्य करते हुये बल  $P$  का परिणामीबल  $2P$  होगा जो  $AC$  के समानान्तर  $O$  पर कार्य करेगा ।

चूँकि ये दोनों परिणामीबल बराबर और विपरीत हैं, इसलिये ये समतुलित होंगे । अतः अब हमारे पास दो बल  $(P, P)$  रह गये हैं जो  $A_1$  और  $B_1$  पर  $A_1C_1$  और  $B_1D_1$  की दिशाओं अर्थात् मौलिक बलयुग्म के बलों की दिशाओं के समानान्तर कार्य करते हैं ।

और  $A_1C_1$  और  $B_1D_1$  में होकर खींचा गया धरातल,  $AC$  और  $BD$  में होकर खींचे गये धरातल के समानान्तर है ।

अतः साध्य सिद्ध हो गया ।

**उपसाध्य ।** इस साध्य और धारा ७१ में हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि एक बलयुग्म समानान्तर धरातल में दूसरे बलयुग्म में स्थानान्तरित किया जा सकता है, यदि दोनों बलयुग्मों के घूर्ण बराबर हों ।

**७४ साध्य ।** एक ही धरातल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये एक बल और एक बलयुग्म कभी भी समतुलित नहीं हो सकते, किन्तु वे मौलिक बल के बराबर होते हैं जो अपनी मौलिक दिशा की समानान्तर दिशा में कार्य करता है ।

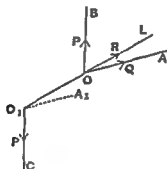


मान लो बलयुग्म का प्रत्येक बल  $P$  के बराबर हैं और उसकी क्रिया-रेखाएँ क्रम से  $OB$  और  $O_1C$  हैं।

मान लो बल  $Q$  है।

पहली स्थिति। यदि  $Q$  बलयुग्म के बलों के समानान्तर नहीं हैं तो मान लो वह बढ़ाये जाने पर बलयुग्म के बलों में से एक को  $O$  पर मिलता है।

$O$  पर कार्य करते हुये  $P$  और  $Q$ , बल  $R$  के बराबर हैं जो  $AO$  और  $OB$  के बीच में किसी दिशा  $OL$  में कार्य करता है।



$OL$  को (यदि आवश्यकता हो तो पीछे की ओर) बढ़ाओ ताकि वह बलयुग्म के दूसरे बल को  $O_1$  पर मिले, और  $R$  के प्रयोग-बिन्दु को  $O_1$  पर स्थानान्तरित करो।

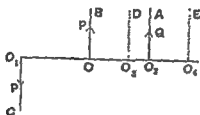
$O_1A_1$  को  $OA$  के समानान्तर रखाओ।

अब बल  $R$  दो बलों  $Q$  और  $P$  में, जिनमें से पहला  $O_1A_1$  दिशा में और दूसरा  $O_1C$  के विपरीत दिशा में कार्य करता है, विभक्त किया जा सकता है।

यह दूसरा बल  $P$  बलयुग्म के दूसरे बल  $P$  में जो  $O_1C$  दिशा में कार्य करता है, समतुल्य है।

अतः परिणामीबल  $Q$  है जो  $O_1A_1$  दिशा में अपनी मौलिक दिशा  $OA$  के समानान्तर कार्य करता है।

दूसरी स्थिति। मान लो बल  $Q$  बलयुग्म के एक बल के समानान्तर है।



मान लो  $O_1O$  बल  $Q$  को  $O_2$  पर मिलती है।

इसलिये  $O$  पर कार्य करता हुआ समानान्तर बल  $P$  और  $O_2$  पर कार्य करता हुआ  $Q$ , धारा ५२ से, बल  $(P+Q)$  के बराबर है जो  $OB$  के समानान्तर दिशा में किसी बिन्दु  $O_3$  पर कार्य करता है। इसी प्रकार  $O_3$  पर कार्य करता हुआ विषम समानान्तर बल  $(P+Q)$  और  $O_4$  पर कार्य करता हुआ  $P$ , बल  $Q$  के बराबर है जो  $O_3D$  के समानान्तर दिशा में किसी बिन्दु  $O_4$  पर कार्य करता है।

अतः परिणामीबल एक मात्र बल  $Q$  के बराबर है जो अपनी मौलिक दिशा के समानान्तर कार्य करता है।

७५—यदि किसी रूढ़ पिंड पर कार्य करते हुये तीन बल परिमाण, दिशा और क्रिया-रेखाओं में क्रमानुसार किसी त्रिभुज की भुजाओं से प्रदर्शित किये जायें, तो वे उस बलयुग्म के बराबर होते हैं जिसका घूर्ण त्रिभुज के क्षेत्रफल के दुगुने से प्रदर्शित होता है।

मान लो  $ABC$  त्रिभुज है और  $P, Q$  और  $R$  बल हैं जो त्रिभुज की भुजाओं  $BC, CA$  और  $AB$  में प्रदर्शित होते हैं।



## अध्याय ७

### एक धरातल में तीन बलों से कार्य किये जाते हुये दृढ़ पिंड का समतुलन

(Equilibrium of a Rigid Body acted upon by three forces in a plane)

७६—इस अध्याय में हम एक धरातल में तीन बलों से कार्य किये जाते हुये दृढ़ पिंड की समतुलित अवस्था की कुछ सरल स्थितियों पर विचार करेंगे।

अगली धारा के साध्य की सहायता से हम यह देखेंगे कि दृढ़ पिंड के समतुलन के नियम एकमात्र कण के नियमों में परिणत हो जाते हैं।

७७—साध्य। यदि किसी दृढ़ पिंड पर एक धरातल में तीन बल कार्य करते हुये उस समतुलित अवस्था में रहते हैं, तो वे बल एक बिन्दु पर मिलेंगे अथवा समानान्तर होंगे।

यदि तीनों बल समानान्तर नहीं हैं तो उनमें से कम से कम दो अवश्य मिलेंगे, मान लो ये दोनों  $P$  और  $Q$  हैं और मान लो उनकी क्रोदा-रेखाएँ  $O$  पर मिलती है।

तो तीसरा बल  $R$  भी  $O$  से होकर गुजरेगा।

चूँकि किसी भी संख्या में बलों के घूर्णों का बीजीय योग उनके धरातल के किसी बिन्दु पर उनके परिणामीबल के घूर्ण के बराबर होता है, इसलिये  $O$  पर  $P$ ,  $Q$  और  $R$  के घूर्णों का योग उनके परिणामीबल के घूर्ण के बराबर है।

परन्तु यह परिणामी शून्य है क्योंकि बल समतुलित है।



अतः  $O$  पर  $P, Q$  और  $R$  के घूर्णों का योग शून्य होगा ।

परन्तु चूँकि  $P$  और  $Q$  दोनों  $O$  से होकर गुजरते हैं इसलिये  $O$  पर उनके घूर्ण शून्य हैं ।

अतः  $O$  पर  $R$  का घूर्ण भी शून्य है ।

अतः धारा ५७ से, चूँकि  $R$  शून्य नहीं है, उसकी क्रिया-रेखा  $O$  से होकर गुजरेगी ।

अतः वल एक बिन्दु में होकर गुजरते हैं ।

अन्यथा इस प्रकार ।  $P$  और  $Q$  का परिणामीबल कोई वल होगा जो  $O$  से होकर गुजरेगा ।

परन्तु चूँकि वल  $P, Q$  और  $R$  समतुलित हैं, यह  $P$  और  $Q$  का परिणामीबल  $R$  से समतुलित होगा ।

परन्तु ये दोनों समतुलित नहीं होंगे जबतक कि उनकी क्रिया-रेखाएँ एक ही न हों ।

अतः  $R$  की क्रिया-रेखा  $O$  से होकर गुजरेगी ।

७८—पिछले साध्य से हम देखते हैं कि धरातल में कार्य करते हुये तीन बलों के समतुलन के नियम आसानी से मालूम किये जा सकते हैं । चूँकि तीनों वल एक बिन्दु से होकर गुजरेंगे, इसलिये लामी के प्रमेय (धारा ४०) का प्रयोग करके, अथवा बलों को दो समकोणीय दिशाओं में विद्विष्ट करके ( धारा ४६ ), अथवा लेखा-चित्रीय रचना से, हम वाञ्छित नियम मालूम कर सकते हैं ।

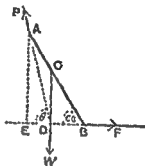
उदाहरण १ । एक भारी सम दंड  $AB$ ,  $A$  पर किसी नियत बिन्दु से कब्जे द्वारा लगा हुआ है, और उसके नीचे के सिरे  $B$  पर एक क्षैतिज बल लगाया गया है जिसके प्रयोग से दंड क्षैतिज से  $60^\circ$  का कोण बनाता है ; कब्जे पर प्रतिबल और  $F$  का परिमाण मालूम करो ।

मान लो दंड के मध्य-बिन्दु  $C$  से खींची गई उर्ध्वाधर रेखा  $B$  से ,

सीधी गई क्षैतिज रेखा को  $D$  पर मिलती है और मान लो दंड का भार  $W$  है।

दंड पर केवल तीन बल, अर्थात् बल  $F$ , भार  $W$ , और कच्चे का अज्ञात प्रतिक्रिया  $P$ , कार्य करते हैं।

इसलिये यह तीनों एक बिन्दु पर मिलेंगे। और चूंकि  $F$  और  $W$ ,  $D$  पर मिलते हैं, इसलिये कच्चे पर प्रतिक्रिया की क्रिया-रेखा  $DA$  ही होगी।



$EB$  पर  $AE$  लम्ब डालो, और मान लो कोण  $ADE$ ,  $\theta$  के बराबर है।

$$\text{इसलिये स्पष्टता } \theta = \frac{AE}{ED} = \frac{2AE}{EB} = 2 \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

और लामो के प्रमेय से,

$$\frac{F}{\sin WDA} = \frac{W}{\sin ADB} = \frac{P}{\sin WDB},$$

अर्थात्

$$\frac{F}{\sin (90^\circ + \theta)} = \frac{W}{\sin (180^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin 90^\circ}.$$

$$\therefore F = W \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = W \cot \theta = \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{W}{6} \sqrt{3},$$

और

$$P = W \frac{1}{\sin \theta} = W \sqrt{1 + \cot^2 \theta} = W \sqrt{\frac{13}{12}}.$$

अन्यथा इस प्रकार।  $ADE$  बल-त्रिभुज है, क्योंकि इसकी भुजायें बलों के समानान्तर हैं। अतः  $\theta$  को हम नाप सकते हैं, और

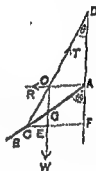
$$\frac{P}{AD} = \frac{F}{ED} = \frac{W}{AE}.$$

उदाहरण २ । एक सम दंड  $AB$  ऊर्ध्वाधर से  $60^\circ$  का कोण बनाता है, उसका सिरा  $A$  एक चिकना ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका है और दंड के एक बिन्दु  $C$  से, जो  $B$  से एक फुट का दूरी पर है, बँधी हुई एक डोरी जो  $A$  से ठीक ऊपर दीवार के एक बिन्दु पर लगे हुये छल्ले से बँधी हुई है, दंड को सम्हाले हुये है ; यदि दंड ४ फुट लम्बा है, तो छल्ले का स्थान और डोरी का भुकाव और तनाव ज्ञात करो ।

मान लो दीवार पर  $A$  से खींचा गया लम्ब और दंड के मध्य-बिन्दु  $G$  से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा  $O$  पर मिलती है ।

इसलिये तीसरा बल, डोरी का तनाव  $T$ ,  $O$  से होकर गुजरेगा । इसलिये  $CO$  बढ़ाये जाने पर छल्ले के स्थान  $D$  से होकर गुजरेगी ।

मान लो कोण  $CDA = \theta$ , और क्षैतिज रेखा  $CEF$  खींचो जो  $OG$  को  $E$  और दीवार को  $F$  पर मिले ।



$$\text{अब स्पष्टता } II = \text{स्पष्टता } COE = \frac{CE}{OE} = \frac{CG \text{ ज्या } CGE}{AF}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{ज्या } 60^\circ}{\text{कोज्या } 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ.$$

$$\therefore ACD = 60^\circ - \theta = 30^\circ.$$

अतः  $AD = AC = 3$  फुट, जिससे छल्ले का स्थान निकल आता है ।

यदि  $R$  दीवार पर प्रतिबल और  $W$  दंड का भार है, और चूंकि बल त्रिभुज  $AOD$  की भुजाओं के अनुपातीय है, इसलिये

$$\frac{T}{OD} = \frac{R}{AO} = \frac{W}{DA}.$$

$$\therefore T = W \frac{OD}{DA} = \frac{W}{\cos 30^\circ} = W \cdot \frac{2}{\sqrt{3}},$$

और  $R = W \frac{AO}{DA} = W' \sin 30^\circ = W'.$

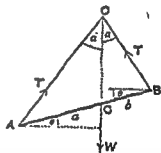
उदाहरण ३। एक दंड के सिरो पर एक डोरी जिसकी लम्बाई  $l$  है बंधी हुई है, और डोरी एक छोटे चिकने स्यूटे के ऊपर होकर लटकी हुई दंड को साधे हुये है। दंड का उसका गुरुत्व-केन्द्र दो भागों में, जिनकी लम्बाई  $a$  और  $b$  है, बाँटा है। दंड की वह समतुलित अवस्था मालूम करो जब कि वह ऊर्ध्वाधर अवस्था में नहीं है।

[नोट—किसी पिंड का गुरुत्व-केन्द्र वह बिन्दु है जिस पर उसका भार कार्य करता हुआ मान लिया जाता है।]

मान लो  $AB$  दंड है और  $C$  उसका गुरुत्व-केन्द्र है, और मान लो  $O$  खूँटी है और डोरी के भाग  $AO$  और  $OB$  की लम्बाइयाँ क्रम से  $x$  और  $y$  है।

चूँकि पिंड पर केवल तीन बल कार्य करते हैं इसलिये वे एक ही बिन्दु पर मिलेंगे।

परन्तु दोनों तनाव  $O$  से होकर गुजरते हैं, इसलिये भार  $W$  की क्रिया-रेखा भी  $O$  से होकर गुजरेगी, और इसलिये  $CO$  ऊर्ध्वाधर होगी।



चूँकि डोरी चिकनी खूँटी के ऊपर होकर गुजरती है इसलिये उसके तनाव में कोई परिवर्तन नहीं होता; और चूँकि  $W$  इन दोनों बराबर बलों के परिणामीबल से समतुलित है इसलिये वह इनके बीच के कोण को समविभाजित करेगा।

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \alpha \text{ (मान लो).}$$

अतः ज्यामिति से,  $\frac{x}{y} = \frac{AC}{CB} = \frac{a}{b}.$



और

$$x+y=l.$$

∴ इन समीकरणों को हल करके,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{l}{a+b} \dots\dots\dots (१).$$

और त्रिभुज  $AOB$  से,

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos 2\alpha = (x+y)^2 - 2xy(1 + \cos 2\alpha) \\ &= (x+y)^2 - 4xy \cos^2 \alpha = l^2 - 4 \frac{l^2 ab}{(a+b)^2} \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{l^2 - (a+b)^2}{4l^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{ab} \dots\dots\dots (२).$$

इस समीकरण से  $\alpha$  मालूम हो जायगा।

मान लो दंड का क्षतिज से झुकाव  $\theta$  है, इसलिये

$$OCA = 90^\circ + \theta.$$

त्रिभुज  $ACO$  से,

$$\frac{\cos(90^\circ + \theta)}{\cos \alpha} = \frac{AO}{AC} = \frac{x}{a} = \frac{l}{a+b}, \quad (१) \text{ से।}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{l \cos \alpha}{a+b},$$

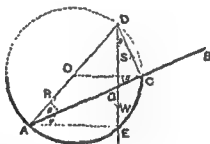
जिससे  $\theta$  निकल आयगा।

और यलों को ऊर्ध्वाधर दिशा में विश्लिष्ट करके  $2T \cos \alpha = 11'$ , जिससे  $T$  निकल आता है।

संख्यात्मक उदाहरण। यदि दंड की लम्बाई 5 फुट और डोरी की लम्बाई 7 फुट है, और दंड का गुरुत्व-केन्द्र उसे 4 : 3 की निष्पत्ति में विभाजित करता है, तो सिद्ध करो कि डोरी के माग परस्पर लम्ब है, और दंड का क्षतिज से झुकाव स्पष्ट्या  $3\frac{1}{2}$  है, और डोरी के तनाव की दंड के भार से निष्पत्ति  $\sqrt{2}:2$  है।

उदाहरण ४ : एक भारी सम दंड जिसकी लम्बाई  $2a$  है, का कुछ भाग एक चिकने अर्द्धगोलीय प्याले के बाहर रखा है और कुछ भाग बाहर है; प्याले का किनारा क्षैतिज है और उसकी त्रिज्या  $r$  है, और दंड का एक बिन्दु किनारे को स्पर्श करता है। यदि दंड क्षैतिज से कोण  $\theta$  बनाता है, तो सिद्ध करें कि  $2r$  कोज्या  $2\theta = a$  कोज्या ॥

मान लो चित्र दंड में होकर गुजरते हुये अर्द्धगोल के ऊर्ध्वाधर परिच्छेद को प्रदर्शित करता है।



मान लो  $AB$  दंड है,  $G$  उसका गुरुत्व-केन्द्र और  $C$  वह बिन्दु है जहाँ दंड प्याले के किनारे को मिलता है।

$A$  पर प्रतिबल प्याले के केन्द्र  $O$  से होकर बाएँ की ओर दंड के ऊपर कार्य करेगा, क्योंकि  $AO$  ही केवल एक मात्र रेखा है जो  $A$  से होकर खींची गई है और  $A$  पर प्याले के स्पर्श-बल लम्ब है।

$C$  पर प्रतिबल भी दंड पर लम्ब है, क्योंकि यह एक दिशा है जो दोनों दंड और प्याले के किनारे पर लम्ब है।

यह दोनों प्रतिबल  $D$  पर मिलते हैं; और दंड के  $2-3$  के  $D$  उस ज्यामितीय गोल पर होगा त्रिज्या  $2r$  का होगा।

अतः दंड के मध्यबिन्दु  $G$  से होकर  $2r$  की त्रिज्या का गोल खींचा जाये और गुजरेंगी।

$A$  से होकर  $AE$  क्षैतिज रेखा खींची जाये  $LG$  को  $2r$  की त्रिज्या का गोल को मिला दो।

चूँकि  $OC$  और  $AE$  समानान्तर हैं,

$$\therefore \angle OCA = \angle CAE = \theta.$$

चूँकि  $OC = OA$ ,  $\therefore \angle OAC = \angle OCA = \theta$ .

और  $\angle GDC = 90^\circ - \angle DGC = \theta$ .

$$\therefore AE = AG \text{ कोज्या } \theta = a \text{ कोज्या } \theta,$$

और  $AE = AD \text{ कोज्या } 2\theta = 2r \text{ कोज्या } 2\theta$ .

$$\therefore 2r \text{ कोज्या } 2\theta = a \text{ कोज्या } \theta,$$

जिससे  $\theta$  निकल आया।

और तामों के प्रमेय से, यदि  $A$  और  $C$  पर  $R$  और  $S$  प्रतिबल हैं, तो

$$\frac{R}{\text{ज्या } \theta} = \frac{S}{\text{ज्या } ADG} = \frac{W'}{\text{ज्या } ADC'}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{R}{\text{ज्या } \theta} = \frac{S}{\text{कोज्या } 2\theta} = \frac{W'}{\text{कोज्या } \theta}.$$

संख्यात्मक उदाहरण। यदि  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ , तो  $\theta = 30^\circ$  और

$$R = S = W' \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

उदाहरण ५। एक छड़, जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसे  $a$  और  $b$  दो भागों में विभाजित करना है, एक चिरने गोल के भीतर रखी हुई है; यदि समतुलन अवस्था में क्षैतिज से उमका भुजा  $\theta$  है और गोल के केन्द्र पर छड़  $2a$  कोण बनाती है, तो गिद्ध को निः

$$\text{स्पज्या } \theta = \frac{b-a}{b+a} \text{ स्पज्या } a.$$

इस स्थिति में छड़ के सिरों पर दोनों प्रतिबल  $R$  और  $S$  गोल के केन्द्र  $O$  में होकर गुजरेंगे। अतः छड़ का गुरुत्व-केन्द्र  $G$ ,  $O$  के ठीक ऊर्ध्वाधर नीचे होगा।

मान लो  $OG$ ,  $A$  में होकर खींची गई क्षैतिज रेखा को  $N$  पर मिलती है।

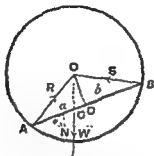
$AB$  पर  $OD$  लम्ब खींचो ।

अब

$$\angle AOD = \angle BOD = \alpha,$$

और

$$\angle DOG = 90^\circ - \angle DGO = \angle DAN = \theta.$$



$$\begin{aligned} \text{अतः } \frac{a}{b} &= \frac{AG}{GB} = \frac{AD - GD}{BD + GD} = \frac{OD \text{ स्पज्या } AOD - OD \text{ स्पज्या } GOD}{OD \text{ स्पज्या } BOD + OD \text{ स्पज्या } GOD} \\ &= \frac{\text{स्पज्या } \alpha - \text{स्पज्या } \theta}{\text{स्पज्या } \alpha + \text{स्पज्या } \theta} \\ \therefore \text{स्पज्या } \theta &= \frac{b - a}{b + a} \text{ स्पज्या } \alpha. \end{aligned}$$

इस समीकरण से  $\theta$  मालूम हो जायगा ।

और लामी के प्रमेय से,

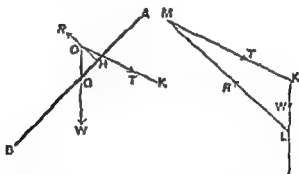
$$\begin{aligned} \frac{R}{\text{ज्या } BOG} &= \frac{S}{\text{ज्या } AOG} = \frac{W}{\text{ज्या } AOB} \\ \therefore \frac{R}{\text{ज्या } (\alpha + \theta)} &= \frac{S}{\text{ज्या } (\alpha - \theta)} = \frac{W}{\text{ज्या } 2\alpha} \end{aligned}$$

जिनसे प्रतिबल मालूम हो जायेंगे ।

संख्यात्मक उदाहरण । यदि छड़ का भार 40 पौ० है, और वह गोल के केन्द्र पर एक समकोण बनाती है, और यदि उसका गुरुत्व-केन्द्र उसे 1:2 की निष्पत्ति में विभाजित करता है तो सिद्ध करो कि क्षैतिज से उसका झुकाव स्पज्या  $^{-1}\frac{1}{3}$  है, और प्रतिबल क्रम से  $8\sqrt{5}$  और  $16\sqrt{5}$  पौ० भार के बराबर है ।

उदाहरण ६ । सिद्ध करो कि किसी पतंग पर कार्य करते हुये या उसे किस प्रकार समतुलित अवस्था में रखते हैं ; इस बात का प्रमाण देने हुये कि पतंग पर खींचा गया लम्ब, डोरी की दिशा और ऊर्ध्वाधर के बीच में होगा ।

मान लो  $AB$  पतंग की मध्य रेखा है, और बिन्दु  $B$  पर पुनः लम्बी हुई है ; पतंग का घरातल कागज के घरातल पर लम्ब है । मान लो पुनः सहित पतंग का गुरुत्व-केन्द्र  $G$  है ।



एक ही त्रिज्या को पाप के प्रत्येक बिन्दु पर दो अवयव बाँटे हैं। त्रिज्या के एक अवयव पर लम्ब होगा और दूसरा उसके समाप्त के मध्य में होगा। दूसरे अवयव बाँटे का उन पर कोई प्रभाव नहीं होगा और इसे छोड़ दिया जा सकता है। पहले अवयव बाँटे को एक मान लें  $R$  में संशोधित किया जा सकता है जो पाप पर लम्ब होगा और बिन्दु  $H$  पर जो  $G$  के कुछ ऊपर है कार्य करेगा।

ह. और  $11.0$  पर मिलते हैं और इनके संस्तर तीसरे दशक में  
शरीर के ताप  $T$  को नियंत्रित करता है।

KL अर्थात् ११ वाँ अक्षरिण का ११ वाँ अक्षरिण, जो LM, ११ वाँ अक्षरिण का ११ वाँ अक्षरिण का ११ वाँ अक्षरिण।

આર્થિક અને સમાજિક સુધારા માટે, NDA સીટી અને નાણાં પ્રમુખ દ્વારા સમર્થન મળે છે.

चित्र से स्पष्ट है कि रेखा  $MA$  ऊर्ध्वाधर  $LA$  से रेखा  $LM$  की ओर बढ़ा कोण बनायगी अर्थात् पतंग पर लम्ब ऊर्ध्वाधर और डोरी की दिशा के बीच में होगा।

बल-त्रिभुज से यह भी स्पष्ट है कि  $T$  और  $W$  दोनों हवा से लगे हुये बल  $R$  से कम होंगे।

७९.—त्रिकोणमितीय साध्य। दो त्रिकोणमितीय साध्य ऐसे हैं जो स्थिति सम्बन्धी प्रश्नों के हल करने में प्रायः कार्य में आते हैं :— यदि किसी त्रिभुज  $ABC$  के आधार में  $P$  कोई बिन्दु है, और यदि  $CP$ ,  $AB$  को  $m$  और  $n$  दो भागों में और कोण  $C$  को  $\alpha$  और  $\beta$  दो भागों में विभाजित करती है, और यदि कोण  $CPB$ ,  $\theta$  के बराबर है, तो

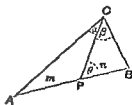
$$(m+n) \text{ कोस्पज्या } \theta = m \text{ कोस्पज्या } \alpha - n \text{ कोस्पज्या } \beta \dots \dots (1),$$

$$\text{और } (m+n) \text{ कोस्पज्या } \theta = n \text{ कोस्पज्या } A - m \text{ कोस्पज्या } B \dots \dots (2).$$

$$\begin{aligned} \text{चूँकि } \frac{m}{n} &= \frac{AP}{BP} = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{PC}{PB} = \frac{\text{ज्या } ACP}{\text{ज्या } PAC} \cdot \frac{\text{ज्या } PBC}{\text{ज्या } PCB} \\ &= \frac{\text{ज्या } \alpha}{\text{ज्या } (\theta - \alpha)} \cdot \frac{\text{ज्या } (\theta + \beta)}{\text{ज्या } \beta}, \text{ क्योंकि } \angle PBC = 180^\circ - (\beta + \theta), \\ &= \frac{\text{ज्या } \alpha (\text{ज्या } \theta \text{ कोज्या } \beta + \text{कोज्या } \theta \text{ ज्या } \beta)}{\text{ज्या } \beta (\text{ज्या } \theta \text{ कोज्या } \alpha - \text{कोज्या } \theta \text{ ज्या } \alpha)} \\ &= \frac{\text{कोस्पज्या } \beta + \text{कोस्पज्या } \theta}{\text{कोस्पज्या } \alpha - \text{कोस्पज्या } \theta}, \end{aligned}$$

$$\therefore m \text{ कोस्पज्या } \alpha - n \text{ कोस्पज्या } \beta = (m+n) \text{ कोस्पज्या } \theta.$$

$$\begin{aligned} \text{और } \frac{m}{n} &= \frac{\text{ज्या } ACP}{\text{ज्या } PAC} \cdot \frac{\text{ज्या } PBC}{\text{ज्या } PCB} \\ &= \frac{\text{ज्या } (\theta - A)}{\text{ज्या } A} \cdot \frac{\text{ज्या } B}{\text{ज्या } (\theta + B)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\text{ज्या } \theta \text{ कोज्या } A - \text{कोज्या } \theta \text{ ज्या } A) \text{ ज्या } B}{\text{ज्या } A (\text{ज्या } \theta \text{ कोज्या } B + \text{कोज्या } \theta \text{ ज्या } B)} \\
 &= \frac{\text{कोस्पज्या } A - \text{कोस्पज्या } \theta}{\text{कोस्पज्या } B + \text{कोस्पज्या } \theta}
 \end{aligned}$$

$$\therefore (m+n) \text{ कोस्पज्या } \theta = n \text{ कोस्पज्या } A - m \text{ कोस्पज्या } B.$$

इन सूत्रों का प्रयोग धारा ७८ के उदाहरण ५ में किया जा सकता है।  
सूत्र (२) से

$$(a+b) \text{ कोस्पज्या } OGB = b \text{ कोस्पज्या } OAB - a \text{ कोस्पज्या } OBA,$$

$$\text{अर्थात्} \quad (a+b) \text{ स्पज्या } \theta = b \text{ स्पज्या } a - a \text{ स्पज्या } a.$$

इनके प्रयोग के और उदाहरण इस पुस्तक में आगे चल कर पाए जायेंगे।

### उदाहरणमाला ११

१। एक सम दंड  $AB$ , जिसका भार  $W$  है, ऊर्ध्वाधर धरातल में  $A$  पर एक कब्जे के चारों ओर घूम सकता है। भार  $P$  उसे समतुलित अवस्था में रखे हुये है और वह एक चिकनी खूंटो  $C$  के ऊपर होकर डोरी  $BCP$  से बंधा हुआ है।  $AC$  ऊर्ध्वाधर है; यदि  $AC=AB$ , तो निर्दिष्ट करो कि  $P=IV$  कोज्या  $ACB$ .

✓ २। एक सम दंड अपने एक सिरे के चारों ओर बेरोक घूम सकता है और एक क्षैतिज बल जो उसके दूसरे सिरे पर लगाया गया है उसे ऊर्ध्वाधर से एक ओर खींचे हुये है। यह क्षैतिज बल दंड के भार से आधा है; त्रिज्या दंड ऊर्ध्वाधर से कौनसा कोण बनायेगा ?

✓ ३। एक सम दंड  $AB$  को, जो  $A$  पर कब्जे द्वारा लगा हुआ है, एक डोरी  $BC$  जो दंड से  $45^\circ$  का कोण बनाती है, क्षैतिज अवस्था में रखे हुये है और दंड के गिरे  $B$  में  $10 \text{ पो.}$  का भार लटका हुआ है। यदि दंड हल्का है तो डोरी का तनाव और कब्जे पर प्रतिबल ज्ञात करो।

४। एक सम भारी दंड  $AB$  का गिरा  $A$  एक चिकनी ऊर्ध्वाधर

दीवार से टिका हुआ है ; एक डोरी का एक सिरा दंड के एक बिन्दु  $C$  से और दूसरा सिरा दीवार से इस प्रकार बंधा हुआ है कि  $AC = \frac{1}{4} AB$  ; डोरी की लम्बाई मालूम करो जबकि दंड ऊर्ध्वाधर से किसी कोण पर झुका हुआ है ।

१५।  $ACB$  एक सम दंड है जिसका भार  $W$  है ; उसका सिरा  $A$  एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार  $AD$  पर टिका हुआ है और उसे  $CD$  डोरी  $B$  को ऊपर रखते हुये थामे हुये है ;  $DB$  क्षैतिज है और  $CD$  दीवार से  $30^\circ$  का कोण बनाती है । डोरी का तनाव और दीवार का प्रतिबल मालूम करो, और सिद्ध करो कि  $AC = \frac{1}{3} AB$ .

६। एक मम दंड  $AB$  का एक सिरा  $A$  एक चिकनी दीवार पर टिका हुआ है और उसे  $BC$  डोरी, जो उसके दूसरे सिरे  $B$  से और  $A$  के ठीक ऊर्ध्वाधर ऊपर  $C$  बिन्दु से बंधी हुई है, थामे हुये है । एक चित्र खींचो जिसमें दंड को समतुलित अवस्था में रखने वाले बलों की क्रिया-रेखायें दिखलाई गई हों, और सिद्ध करो कि डोरी का तनाव दंड के भार से अधिक है ।

७। दी हुई लम्बाई के एक मम दंड  $AB$  का सिरा  $A$  एक चिकनी दीवार पर टिका हुआ है, और उसे डोरी  $CD$  जो उसके किसी ज्ञात बिन्दु  $C$  से और दीवार पर एक बिन्दु  $D$  से बंधी हुई है, थामे हुये है ; यदि दीवार से दंड को झुकाव दिया हुआ हो, तो ज्यामितीय रचना द्वारा बताओ कि डोरी  $CD$  की लम्बाई और  $A$  के ऊपर  $D$  की ऊँचाई किस प्रकार मालूम की जा सकती है ।

सिद्ध करो कि प्रश्न तब ही सम्भव हो सकता है जब कि  $AC < \frac{1}{2} AB$  से छोटी अथवा बड़ी होने के अनुसार दिया हुआ कोण  $BAD$  न्यून अथवा अधिक हो ।

१८। एक सम दंड की लम्बाई  $a$  है और उसका एक सिरा ऊर्ध्वाधर दीवार से टिका हुआ है । दंड को एक डोरी जिसकी लम्बाई  $l$  है और जो दंड के दूसरे सिरे से बंधी हुई है थामे हुये है । डोरी का दूसरा सिरा दीवार के एक बिन्दु से बंधा हुआ है : सिद्ध करो कि दंड दीवार से कोण  $\theta$  बनाती हुई



टिकी रहेगी जबकि कोज्या  $2\theta = \frac{l^2 - a^2}{3a^2}$ . समतुलित अवस्था होने के लिये

निष्पत्ति  $a:l$  की सीमायें क्या होंगी ?

१. दो बराबर भार  $P$  दो डोरियों  $ACP$  और  $BCP$  से बंधे हुये हैं जो एक चिकनी खूटी  $C$  के ऊपर होकर जाती हैं।  $AB$  एक भारी छड़ है, जिसका भार  $W$  है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र  $A$  से  $a$  फुट और  $B$  से  $b$  फुट है ; सिद्ध करो कि  $AB$  क्षैतिज से कोण

$$\text{स्पज्या}^{-1} \left[ \frac{a-b}{a+b} \text{ स्पज्या} \left( \text{ज्या}^{-1} \frac{W}{2P} \right) \right]$$

बनाती है।

२. एक भारी सम छड़ किसी नियत बिन्दु से दो डोरियों द्वारा जो उसके सिरों से बंधी हुई है, लटकी हुई है ; यदि डोरियों और छड़ की लम्बाई  $2:3:4$  के अनुपात में हैं, तो सिद्ध करो कि डोरियों के तनाव और दंड का भार  $2:3:\sqrt{10}$  के अनुपात में होंगे।

३. एक भारी सम दंड, जिसकी लम्बाई 15 इंच है, एक नियत बिन्दु से 9 और 12 इंच लम्बी दो डोरियों द्वारा जो उसके सिरों से बंधी हुई है लटका हुआ है ; यदि दंड ऊर्ध्वाधर से कोण  $\theta$  बनाता है, तो सिद्ध करो कि  $25 \text{ ज्या } \theta = 24$ .

४. एक सीधा सम दंड, जिसका भार 3 पौं० है, एक खूटी से दो डोरियों द्वारा, जिन के एक सिरे खूटी से और दूसरे सिरे दंड के सिरों से बंधे हुये हैं, लटका हुआ है ; डोरियों के बीच का कोण एक समकोण है, और एक डोरी दूसरी से दुगनी है ; डोरियों के तनाव मातूम करो।

५. दो बराबर भारी गोले एक गोलीय प्याले के भीतर समतुलित अवस्था में रखे हुये हैं ; गोलों की त्रिज्या 1 इंच और प्याले की त्रिज्या 3 इंच है। सिद्ध करो कि प्याले और एक गोले के बीच का प्रतिबल दोनों गोलों के बीच के प्रतिबल से दुगना है।

६. एक गोला जिसका भार  $W$  दिया हुआ है दो चिकने घरातलों के

बीच में रखा हुआ है, एक धरातल ऊर्ध्वाधर है और दूसरा ऊर्ध्वाधर से कोण  $\alpha$  बनाता है ; धरातलों के प्रतिबल मालूम करो ।

१५ । एक दृढ़ ठोस गोला दो समानान्तर छड़ों पर रखा हुआ है जो एक ही क्षैतिज धरातल में है । दोनों छड़ों के बीच की दूरी गोले की त्रिज्या के बराबर है ; प्रत्येक छड़ का प्रतिबल मालूम करो ।

१६ । एक चिकना गोला एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार से स्पर्श करता हुआ एक डोरी से यमा हुआ है जो उसके पृष्ठ के एक बिन्दु से बंधी हुई है और जिसका दूसरा सिरा दीवार के एक बिन्दु से बंधा हुआ है ; यदि डोरी की लम्बाई गोले की त्रिज्या के बराबर है, तो ऊर्ध्वाधर से डोरी का झुकाव, उसका तनाव, और दीवार का प्रतिबल मालूम करो ।

१७ । एक तसवीर जिसका भार दिया हुआ है एक चिकनी दीवार पर ऊर्ध्वाधर लटकी हुई है और एक डोरी से सधी हुई है जो दीवार में गड़ी हुई एक खूंटी के ऊपर होकर जाती है ; डोरी के सिरे तसवीर के ऊपर के किनारे के दो बिन्दुओं से बंधे हुये हैं जो किनारे के मध्य-बिन्दु से बराबर दूरी पर हैं । यह किनारा खूंटी पर  $60^\circ$  का कोण बनाती है । इस स्थिति में तुलना उस स्थिति से करो जबकि डोरी की लम्बाई अपनी मौलिक तनाव की लम्बाई की दो तिहाई कर दी जाय ।

१८ । एक तसवीर, जिसका भार 40 पी० है, एक डोरी से, जो उसके ऊपर के दो कोनों से बंधी हुई है और एक कील के ऊपर होकर गुजरती है, इस प्रकार लटकी हुई है कि उसके ऊपर के और नीचे के किनारे क्षैतिज हैं और डोरी के दोनों भाग कील पर  $60^\circ$  का कोण बनाते हैं । डोरी का तनाव मालूम करो ।

१९ । एक तसवीर सममित अवस्था में एक डोरी से लटकी हुई है । डोरी एक कील के ऊपर होकर जाती है और तसवीर के दो छल्लों से बंधी हुई है ; यदि डोरी 4 फुट लम्बी है और कील छल्लों को मिलाने वाली क्षैतिज रेखा से 1 फुट 6 इंच की दूरी पर है, और तसवीर का भार 10 पी० है, तो डोरी का तनाव क्या होगा ?

२०। एक आयताकार तसवीर एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिकी हुई है और उसे दो बिन्दुओं से बंधी हुई दो समानान्तर डोरियाँ जिनके दूसरे सिरे तसवीर के पिछले हिस्से के ऊपर के किनारे के दो बिन्दुओं से बंधे हुये हैं, साधे हुये हैं। प्रत्येक डोरी की लम्बाई तसवीर की ऊँचाई के बराबर है। यदि तसवीर का गुरुत्व-केन्द्र उसके केन्द्र पर हो, तो सिद्ध करो कि तसवीर दीवार पर ऊर्ध्वाधर से कोण स्पष्ट्या  $^{-1}\frac{b}{3a}$  बनाती हुई टिकी रहेगी जहाँ तसवीर की ऊँचाई  $a$  और उसकी मोटाई  $b$  है।

२१। एक तसवीर को ऊर्ध्वाधर दीवार पर इस प्रकार टाँगना है कि वह दीवार से कोण  $\alpha$  बनाये और एक डोरी से सधी रहे जो दीवार पर तसवीर के नीचे के किनारे से धी हुई ऊँचाई  $h$  पर एक बिन्दु पर बंधी हो; ज्यामितीय रचना द्वारा तसवीर के पीछे उस बिन्दु का स्थान मालूम करो जहाँ पर डोरी बाँधी जाय और डोरी की लम्बाई भी मालूम करो।

२२। एक दंड एक चिकने अर्द्धगोलीय प्याले के भीतर पूरा रखा हुआ है। प्याले की त्रिज्या  $r$  है और दंड का गुरुत्व-केन्द्र उसे  $a$  और  $b$  दो भागों में विभाजित करता है। यदि समतुलित अवस्था में, दंड क्षैतिज से कोण  $\theta$  बनाता है, तो सिद्ध करो कि ज्या  $\theta = \frac{b-a}{2\sqrt{r^2-ab}}$ , और दंड और प्याले के बीच के प्रतिबल भी मालूम करो।

२३। एक चिकने अर्द्धगोलीय प्याले के भीतर एक भारी दंड रखा हुआ है जिसकी लम्बाई प्याले की त्रिज्या के बराबर है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसके एक सिरे से उसकी लम्बाई की एक तिहाई की दूरी पर है; सिद्ध करो कि दंड ऊर्ध्वाधर से कोण स्पष्ट्या  $^{-1}(3\sqrt{3})$  बनाता है।

२४। ४ इंच लम्बे एक सम दंड का एक सिरा एक चिकने अर्द्धगोलीय प्याले के भीतर रखा हुआ है, प्याले की घुरी ऊर्ध्वाधर है और त्रिज्या

$\sqrt{3}$  इंच है, सिद्ध करो कि दंड का चौथाई भाग उसके किनारे से बाहर निकला रहेगा।

यह भी सिद्ध करो कि सबसे छोटे दंड की लम्बाई जो इस प्रकार रखा जा सकता है  $2\sqrt{2}$  इंच है।

निम्न प्रश्न को लेखा-चित्र द्वारा हल करना चाहिये।

२५। 10 फुट लम्बी एक भारी छड़  $AB$ ,  $A$  को ऊपर किये हुये दो रस्सियों से सधी हुई है जो  $A$  और  $B$  से इस प्रकार बँधी हुई है कि वे क्षैतिज से क्रमशः  $55^\circ$  और  $30^\circ$  के कोण बनाती है, यदि  $AB$  क्षैतिज में  $20^\circ$  का कोण बनाती है, तो वताओ  $A$  में उसका गुरुत्व-केन्द्र कितनी दूर है। यदि छड़का भार 200 पौ० है तो दोनों रस्सियों के तनाव मालूम करो।

२६। 2 फुट लम्बा एक हल्का दंड  $AB$  एक नियत आलम्बन से  $A$  पर एक चिकने कब्जे द्वारा लगा हुआ क्षैतिज अवस्था में है;  $D$  पर जहाँ ( $AB=9$  इंच) दंड 100 पौ० का भार सम्हाले हुये है, और उसे एक हल्का दंड  $CB$  रोके हुये है।  $C, A$  के ठीक नीचे है और  $AC=6$  इंच। दंड  $CB$  पर दबाव मालूम करो।

२७।  $AB$  एक सम छड़ है जो  $C$  पर एक चूल के चारों ओर घूम सकती है। उसे एक हल्की डोरी  $AD$  जो उसके सबसे ऊँचे बिन्दु  $A$  से और  $C$  के ठीक नीचे एक बिन्दु  $D$  से बँधी हुई है, समतुलित अवस्था में रखे हुये है। यदि  $AB=3$  फुट,  $AC=1$  फुट,  $CD=2$  फुट और  $DA=2.7$  फुट, और छड़का भार 10 पौ० है, तो डोरी का तनाव और चूल पर प्रतिबल मालूम करो।

२८। एक केप्टीलीवर (दीवारगोरी) में एक क्षैतिज दंड  $AB$  है जो  $A$  पर एक नियत आलम्बन से कब्जे द्वारा लगा हुआ है। एक और दंड  $DC$  भी है, जो  $AB$  के एक बिन्दु  $C$  पर और  $B$  के ठीक नीचे एक नियत बिन्दु  $D$  पर भी कब्जे द्वारा लगा हुआ है।  $B$  पर 1 हण्ड्रेडवेट का भार

छगा हुआ है ;  $A$  और  $C$  पर प्रतिबल मालूम करो, जहाँ  $AB=6$  फुट,  $AC=2$  फुट, और  $AD=3$  फुट, और दंडों के भार नगण्य माने गये हैं ।

२९। एक पतंग जिसका भार 10 पौं० है, क्षैतिज से  $60^\circ$  का कोण बनाती है । उसपर हवा के दबाव का परिणामीबल उसके गुरुत्व-केन्द्र से 8 इंच ऊपर कार्य करता है और डोरी उससे 10 इंच ऊपर एक बिन्दु से बँधी हुई है । डोरी का तनाव और हवा का दबाव मालूम करो ।

## अध्याय ८

### एक धरातल में बलों से कार्य किये जाते हुये दृढ़ पिंड के समतुलन के साधारण नियम ।

(General Conditions of Equilibrium of a Rigid body  
acted on by a system of Forces in a Plane).

८०—साध्य । एक धरातल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये बलों का कोई समुदाय एक मात्र बल अथवा एक मात्र बलधुम्ब में परिणत किया जा सकता है ।

बल समानान्तर चतुर्भुज से कोई दो बल जिनकी क्रिया-रेखायें समानान्तर नहीं हैं, एक बल में संयोजित किये जा सकते हैं ; और धारा ५२ से, दो समानांतर बल भी, जो बराबर और विपम नहीं हैं, एक बल में संयोजित किये जा सकते हैं ।

पहले दिये हुये समुदाय के सब समानान्तर बलों को संयोजित करो ।

इस प्रकार प्राप्त हुये समुदाय के किन्हीं उन दो बलों का, जो किसी बलधुम्ब की रचना न करते हो, परिणामीबल  $R_1$  मालूम करो , और  $R_1$  और समुदाय के किसी उपयुक्त तीसरे बल का परिणामीबल  $R_2$  निकालो ; फिर  $R_2$  और समुदाय के किसी उपयुक्त चौथे बल का परिणामीबल निकालो ; इत्यादि जबतक कि सब बल न ले लिये जायें ।

अंत में हमारे पास या तो एक मात्र बल रह जायगा या दो बराबर समानान्तर विपम बल रह जायेंगे जो एक बलधुम्ब की रचना करेंगे ।

८१—साध्य । यदि एक धरातल में बलों का कोई समुदाय किसी पिंड पर कार्य करे और यदि धरातल में किन्हीं तीन बिन्दुओं पर (जो सम-रेखीय नहीं हैं) उनके धूर्णों का बीजीय योग पृथक् पृथक् शून्य हो, तो बलों का समुदाय समतुलित होता है ।

पिछली धारा से बलों का कोई समुदाय या तो एक मात्र बल या एक मान बलपुग्म में संयोजित किया जा सकता है।

परन्तु यही वह एक मात्र बलपुग्म में संयोजित नहीं किया जा सकता, क्योंकि यदि किया जा सकता तो घ्रातल में किसी बिन्दु पर बलों के घूर्णों का योग, धारा ६९ से, स्थिर होता जो शून्य नहीं हो सकता, और यह हमारी कल्पना के विरुद्ध है।

अतः बलों का समुदाय एक मात्र बलपुग्म में संयोजित नहीं हो सकता।

इसलिये समुदाय या तो समतुलित होगा या एक मात्र बल  $F$  में संयोजित किया जा सकेगा।

मान लो वे तीन बिन्दु जिनपर घूर्ण निकालने हैं  $A, B$ , और  $C$  हैं।

क्योंकि बलों के समुदाय के घूर्णों का बीजीय योग उनके परिणामीबल के घूर्ण के बराबर होता है (धारा, ६२), इसलिये  $A$  पर  $F$  का घूर्ण शून्य होगा।

अतः या तो  $F$  शून्य है या  $A$  से होकर गुजरता है।

इसी प्रकार, क्योंकि  $B$  पर  $F$  का घूर्ण शून्य है या तो  $F$  शून्य होगा या  $B$  से होकर गुजरेगा, अर्थात् या तो  $F$  शून्य है या  $AB$  रेखा पर कार्य करता है।

अंत में क्योंकि  $C$  पर घूर्ण शून्य है या तो  $F$  शून्य होगा या  $C$  से होकर गुजरेगा।

परन्तु (क्योंकि  $A, B$ , और  $C$  समरेखीय नहीं हैं)  $C$  से होकर गुजरता हुआ बल  $AB$  पर कार्य नहीं कर सकता।

अतः ग्राह्य स्थिति केवल वही है जब  $F$  शून्य हो अर्थात् बल समतुलित हों।

समुदाय उस स्थिति में भी समतुलित होता है जब (१) घूर्णों का योग दोनों बिन्दुओं  $A$  और  $B$  में से प्रत्येक पर, पृथक् पृथक् शून्य हों, और (२)  $AB$  पर बलों के विश्लिष्ट भागों का योग शून्य हो। क्योंकि यदि (१) सत्य है तो परिणामीबल या तो शून्य होगा या  $AB$  पर कार्य करेगा; और यदि (२) सत्य है तो  $AB$  पर कोई परिणामीबल नहीं हो

मकता ; अतः परिणामीबल शून्य है । और जैसा कि इस धारा में देख आये हैं समुदाय का कोई परिणामीबलशून्य नहीं है, अतः समुदाय समतुलित है ।

८२—साध्य । एक घरातल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये बलों का कोई समुदाय समतुलित होता है जबकि घरातल में दो रेखाओं में से प्रत्येक के समानान्तर उनके अवयव बलों का योग शून्य हो और किसी बिन्दु पर उनके घूर्णों का बीजीय योग भी शून्य हो ।

धारा ८० से बलों का ऐसा समुदाय, या तो एकमात्र बल में या एक मात्र बलशून्य में संयोजित किया जा सकता है ।

परन्तु यहाँ बल एकमात्र बल में संयोजित नहीं किया जा सकते, क्योंकि घरातल में दो रेखाओं के समानान्तर अवयव बलों का योग पृथक् पृथक् शून्य है, इसलिये उनके परिणामीबल के इन दो रेखाओं के समानान्तर अवयव बल भी शून्य होंगे और इसलिये परिणामीबल शून्य होगा ।

और बल एक मात्र बलशून्य में भी संयोजित नहीं किये जा सकते हैं, क्योंकि यदि वे किये जा सकते, तो इस बलशून्य का घूर्ण घरातल के किसी बिन्दु पर किसी स्थिर राशि के बराबर होता जो शून्य नहीं है ; और यह हमारी कल्पना के विरुद्ध है ।

अतः बलों का समुदाय समतुलित होगा ।

८३—यह स्मरण रखना चाहिये कि पिछली धारा में यह कुछ नहीं कहा गया है कि बलों को किन दिशाओं में विशिष्ट करना है । व्यवहार में दोनों दिशाओं को परस्पर समकोणीय लेना हमेशा उत्तम होता है ।

अतः एक घरातल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये बलों के किसी समुदाय के समतुलन के नियम इस प्रकार भालूम किये जा सकते हैं :

(१) किसी निश्चित दिशा में सब बलों के विशिष्ट भागों के बीजीय योग को शून्य के बराबर रखो ।

(२) उसकी लम्ब दिशा में सब बलों के विशिष्ट भागों के बीजीय योग को शून्य के बराबर रखो ।



(३) घरातल के किसी बिन्दु पर बलों के घूर्णों के बीजीय योग को शून्य के बराबर रखो ।

(१) और (२) से यह निश्चित हो जाता है कि पिंड अपने स्थान से गति नहीं करता और (३) से यह निश्चित हो जाता है कि उसमें किसी बिन्दु पर भ्रमण गति नहीं है ।

ऊपर के तीन स्थिति सम्बन्धी नियम और समुदाय के अवयव भागों के बीच के ज्यामितीय सम्बन्ध एक घरातल में कार्य करते हुये बलों के समतुलन के नियमों को निर्णय करने में साधारणतः पर्याप्त होते हैं ।

समतुलन के इन नियमों को किसी विशेष स्थिति में प्रयोग करते समय उन दिशाओं को ठीक से मानने में जिनके ऊपर बलों को विशिष्ट करना है, समीकरण अधिक सरल रूप में लिखे जा सकते हैं । प्रायः क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशायें सबसे अधिक उपयुक्त होती हैं ।

और उस बिन्दु का ठीक से चुनना भी बहुत जरूरी है जिस पर हम बलों के घूर्ण लेते हैं, बिन्दु ऐसा लेना चाहिये कि घूर्ण के समीकरण में कम से कम बल आवे ।

८४—हम देख आये हैं कि पिछली धारा में दिये गये बलों के समुदाय के समतुलन के नियम पर्याप्त हैं ; वे आवश्यक भी हैं ।

मान लो हमें यह मालूम है कि केवल पहले ही दो नियम सन्तुष्ट होते हैं । अब बलों का समुदाय एक बलधुग्म में परिणत किया जा सकता है, क्योंकि इस बलधुग्म के बल, जो बराबर और विपरीत दिशा में होंगे, इस प्रकार के होंगे कि किसी भी दिशा में उनके अवयव बल शून्य होंगे । अतः किसी तीसरी दिशा में विदिलष्ट करने से हमें कोई और अधिक नियम नहीं मालूम हो सकता । ऐसी स्थिति में बल समतुलित नहीं होंगे जबतक कि तीसरा नियम भी सन्तुष्ट न हो ।

पुनः, मान लो कि हमें यह मालूम है कि समुदाय के अवयव बल किसी एक ही दिशा में रेखा पर नष्ट हो जाते हैं, तो इस स्थिति में बलों का समुदाय एकमात्र बल में परिणत किया जा सकता है जो दिये हुए बिन्दु में

होकर दी हुई रेखा की लम्ब दिशा में कार्य कर सकता है ; अतः हम देखते हैं कि यह आवश्यक है कि अवयव बलों का योग एक और रेखा के समानान्तर भी शून्य हो ।

८५—अब हम समतुलन के साधारण नियमों के प्रयोग पर कुछ उदाहरण देंगे । किसी स्थिति सम्बन्धी प्रश्न के हल करने में विद्यार्थी को इस प्रकार बड़ना चाहिये :

(१) सबसे पहिले दिये हुये प्रश्न के अनुसार चित्र खींचे ।

(२) फिर पिंड अथवा पिंडों पर कार्य करते हुये सब बलों को और सम्हालने वाली डोरियों के तनाव को लक्ष्य द्वारा चिन्हित करे और इस बात का ध्यान रखे कि जब कोई पिंड किसी दूसरे पिंड को दाबे अथवा जब कोई पिंड किसी दूसरे पिंड अथवा बिन्दु से काबजे द्वारा लगा हो तो उस जगह एक प्रतिबल मानना होता है जिसका मान निकालना होता है ।

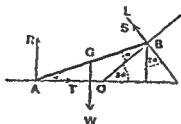
(३) प्रश्न के प्रत्येक पिंड अथवा पिंडों के समुदाय पर कार्य करते हुये बलों के दो उपयुक्त लम्ब दिशाओं (प्रायः क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर) में विदिलिप्त भागों को शून्य के बराबर रखे ।

(४) किसी उपयुक्त बिन्दु पर बलों के घूर्णों को शून्य के बराबर रखे ।

(५) चित्र में आये हुये कोणों और लम्बाइयों के ज्यामितीय सम्बन्धों को लिखे ।

उदाहरण १ । एक भारी सम छड़ का एक सिरा एक क्षैतिज तल पर और दूसरा सिरा एक दिये हुये आनत तल पर रेखा हुआ है ; उसे एक डोरी जो छड़ के क्षैतिज तल पर रखे हुये सिरे से और क्षैतिज और आनत तलों के छेदन से बंधी हुई है समतुलित अवस्था में रखे हुये है ; यदि छड़ का क्षैतिज से बना हुआ कोण  $(\alpha)$  आनत तल के क्षैतिज से बन हुये कोण का आधा है, तो डोरी का तनाव और तलों पर प्रतिबल मालूम करो ।

मान लो  $AB$  छड़ है,  $AO$  क्षैतिज और  $OB$  आनत तल है ।



मान लो  $AO$  डोरी का तनाव  $T$  है, पिंड का भार  $W$  है, और  $R$  और  $S$  क्रमशः  $A$  और  $B$  पर ऊर्ध्वाधर और  $OB$  के लम्ब दिशा में प्रतिक्रिया हैं ।

क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशा में विचार करने पर,

$$T = S \text{ ज्या } 2\alpha \quad (1),$$

$$W = R + S \text{ कोज्या } 2\alpha \quad (2).$$

$A$  पर घूर्ण लेने पर

$$W \cdot a \text{ कोज्या } \alpha = S \cdot AB \text{ ज्या } ABL = S \cdot 2a \text{ कोज्या } \alpha \quad (3),$$

जहाँ पर  $2a$  छड़ की लम्बाई है ।

इन तीन समीकरणों से समतुल्य की अवस्था मालूम हो जाती है ।

$$(3) \text{ से, } S = \frac{1}{2} W.$$

$$\therefore (2) \text{ से, } R = W - \frac{1}{2} W \text{ कोज्या } 2\alpha = W \left(1 - \frac{1}{2} \text{ कोज्या } 2\alpha\right).$$

$$\text{और } (1) \text{ से, } T = \frac{W}{2} \text{ ज्या } 2\alpha.$$

अतः प्रतिक्रिया और डोरी का तनाव मालूम हो गये ।

मान लो कि क्षैतिज से छड़ के झुकाव की वजाय डोरी की लम्बाई  $(=l)$  दी हुई है ।

मान लो क्षैतिज से छड़ का झुकाव  $\theta$  है ।

समीकरण (१) और (२) पहले की भाँति वही रहेंगे परन्तु घूर्ण का समीकरण

$$W.a \text{ कोज्या } \theta = S.AB \text{ ज्या } ABL = S.2a \text{ कोज्या } ABO \\ = S.2a \text{ कोज्या } (2\alpha - \theta) \quad \dots \quad (४)$$

हो जायगा ।

अब  $\theta$  मालूम करने के लिये एक और ज्यामितीय समीकरण होना चाहिये और वह यह है,

$$\frac{l}{2a} = \frac{OA}{AB} = \frac{\text{ज्या } ABO}{\text{ज्या } AOB} = \frac{\text{ज्या } (2\alpha - \theta)}{\text{ज्या } 2\alpha} \quad \dots \quad (५).$$

इस समीकरण में  $\theta$  निकल आता है, और फिर समीकरण (१), (२) और (४) में  $T, R$ , और  $S$  निकल आयेगे ।

यह प्रश्न छड़ और छड़ की लम्ब दिशा में बलों को विश्लिष्ट करके भी हल किया जा सकता है, इन स्थिति में प्रत्येक समीकरण में राशियाँ  $T, R, S$ , और  $W$  आ जायगी और समीकरण पहले की अपेक्षा बहुत जटिल हो जायेंगे ।

$A$  पर घूर्णन निकालना भी उचित था, क्योंकि चित्र में केवल यही एक ऐसा बिन्दु है जिसमें होकर पिंड पर कार्य करते हुये बलों में से दो बल गुजरते हैं ।

उदाहरण २ । एक छड़ जिसका गुरुत्व-केन्द्र  $O$  से क्रम से  $a$  और  $b$  लम्बाई के दो भागों में बाँटता है, समतुलित अवस्था में दो चित्रों के धरातलों के बीच रखा हुई है; छड़ का एक सिरा धरातल पर है और दूसरा दूसरे धरातल पर है और धरातल एक दूसरे को एक क्षैतिज रेखा में काटते हैं और क्षैतिज से क्रमशः कोण  $\alpha$  और  $\beta$  बनाते हैं; छड़ का क्षैतिज में झुकाव और धरातलों के प्रतिबल मालूम करो ।

मान लो  $OA$  और  $OB$  धरातल हैं, और  $AB$  छड़ है जिसका गुरुत्व-केन्द्र  $G$  है, तो  $GA$  और  $GB$  क्रम से  $a$  और  $b$  होंगे ।

मान लो  $A$  और  $B$  पर आन्त तलों के लम्ब दिशा में प्रतिबल  $R$  और  $S$  हैं, और छड़ का झुकाव क्षैतिज से  $\theta$  है ।



$$\therefore a \text{ ज्या } \beta \text{ ( कोज्या } a \text{ कोज्या } \theta + \text{ ज्या } a \text{ ज्या } \theta ) \\ = b \text{ ज्या } a \text{ ( कोज्या } \beta \text{ कोज्या } \theta - \text{ ज्या } \beta \text{ ज्या } \theta ) ;$$

$$\therefore (a+b) \text{ ज्या } a \text{ ज्या } \beta \text{ ज्या } \theta \\ = \text{कोज्या } \theta (b \text{ ज्या } a \text{ कोज्या } \beta - a \text{ कोज्या } a \text{ ज्या } \beta) ;$$

$$\therefore (a+b) \text{ स्पज्या } \theta = b \text{ कोस्पज्या } \beta - a \text{ कोस्पज्या } a, \dots \dots \dots (४),$$

जिससे  $\theta$  का मान मालूम हो जाता है ।

अन्यथा इस प्रकार से : चूँकि पिंड पर कार्य करते हुये केवल तीन बल हैं, अतः यह प्रश्न पिछले अध्याय की रीति से भी हल किया जा सकता है ।

चूँकि तीनों बल  $R, S$ , और  $W$  एक बिन्दु  $O'$  पर मिलेंगे, इसलिये धारा ७९ के साध्य से

$$(a+b) \text{ कोस्पज्या } O'GA = b \text{ कोस्पज्या } \beta - a \text{ कोस्पज्या } a,$$

$$\text{अर्थात् } (a+b) \text{ स्पज्या } \theta = b \text{ कोस्पज्या } \beta - a \text{ कोस्पज्या } a,$$

जो समीकरण (४) ही है ।

अब लामी के प्रमेय (धारा ४०) से

$$\frac{R}{\text{ज्या } BO'G} = \frac{S}{\text{ज्या } AO'G} = \frac{W}{\text{ज्या } AO'B},$$

$$\text{अर्थात् } \frac{R}{\text{ज्या } \beta} = \frac{S}{\text{ज्या } a} = \frac{W}{\text{ज्या } (a+\beta)}.$$

उदाहरण ३ । एक सीढ़ी, जिसका भार 192 पौ० और लम्बाई 25 फुट है, का एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है और दूसरा भूमि पर; यदि उसके सबसे निचले बिन्दु पर एक खैरी उसे किसलने से रोकती है और यदि उस बिन्दु की दीवार से दूरी 7 फुट है, तो खैरी, भूमि, और दीवार पर प्रतिबल मालूम करो ।

मान लो  $AB$  सीढ़ी है और  $G$  उसका मध्य-बिन्दु है, और मान लो

$R$  और  $R_1$  भूमि और दीवार के प्रतिबल हैं और  $S$  खूँटी का क्षैतिज प्रतिबल है। मान लो कोण  $GAO = \alpha$ ,

$$\text{तो कोज्या } \alpha = \frac{AO}{AB} = \frac{7}{25},$$

$$\text{और इसलिये ज्या } \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}.$$

मीठी पर कार्य करने हुये बलों के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अवयव बलों को शून्य के बराबर रखने पर,

$$R - 192 = 0 \quad (1),$$

$$\text{और } R_1 - S = 0 \quad (2).$$

$A$  पर घूर्ण लेने पर,

$$192 \times AG \text{ कोज्या } \alpha = R_1 \times AB \text{ ज्या } \alpha \quad \dots \dots (3);$$

$$\therefore R_1 = 192 \times \frac{1}{2} \text{ कोसज्या } \alpha = 96 \times \frac{7}{25} = 28.$$

अतः (१) और (२) से

$$R = 192 \text{ और } S = 28.$$

इसलिये दृष्ट प्रतिबल क्रमसे 28, 192, और 28 पाँ० भार के बराबर हैं।

पिछले अध्याय से  $R$  और  $S$  का परिणामीबल भार और  $R_1$  की क्रिया-रेखाओं के प्रतिच्छेद-बिन्दु  $O'$  से होकर जायगा।

उदाहरण ४। एक समदंड का एक सिरा किसी कब्जे से लगा हुआ है, और दूसरा सिरे से बंधी हुई एक डोरी दंड को समहाले हुये है; दंड और डोरी दोनों क्षैतिज से एक ही कोण  $\theta$  बनाते हैं; यदि दंड का भार  $W$  है, तो सिद्ध करो कि कब्जे पर प्रतिबल  $\frac{11}{4} \sqrt{8} \div \sin 2\theta$  है।

मान लो  $AB$  दंड है,  $C$  उसका मध्य बिन्दु है, और  $BD$  डोरी है जो  $A$  से होकर सीधी गई क्षैतिज रेखा को  $D$  पर मिलती है।









चूंकि गोले पर केवल तीन बल कार्य करते हैं इसलिये वे एक ही बिन्दु अर्थात् गोले के केन्द्र पर मिलेंगे।

अतः  $OCB$  एक सीधी रेखा है।

मान लो दंड और डोरी के ऊर्ध्वांगर से झुकाव  $\theta$  और  $\phi$  हैं, तो

$$\text{ज्या } (\theta + \phi) = \frac{DB}{OB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \theta + \phi = 30^\circ \quad \dots \quad (1).$$

जो बल दंड पर कार्य करते हैं, वे  $D$  पर प्रतिबल, दंड का भार और कब्जे पर प्रतिबल हैं।

यदि हम  $O$  पर घूर्ण लें तो  $O$  पर प्रतिबल छूट जायगा, और

$$1/2a \text{ ज्या } \theta = R \cdot OD = R \cdot 2a \text{ कोज्या } 30^\circ \quad \dots \quad (2).$$

गोले के समतुलन के नियमों से

$$\frac{T}{\text{ज्या } (\phi + 60^\circ)} = \frac{R}{\text{ज्या } \phi} = \frac{1/2}{\text{ज्या } 60^\circ} \quad \dots \quad (3).$$

इसलिये (२) और (३) से

$$\frac{\text{ज्या } \theta}{\text{कोज्या } 30^\circ} = \frac{R}{1/2} = \frac{\text{ज्या } \phi}{\text{ज्या } 60^\circ}.$$

$$\therefore \phi = \theta, \text{ अतः (१) से } \theta = \phi = 15^\circ.$$

(३) में रखने पर,

$$T = 1/2 \frac{\text{ज्या } 75^\circ}{\text{ज्या } 60^\circ} = 1/2 \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}} = \frac{1/2}{6} (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 1.1153 \times 1/2,$$

$$\text{और } R = 1/2 \frac{\text{ज्या } 15^\circ}{\text{ज्या } 60^\circ} = 1/2 \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} = \frac{1/2}{6} (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = .2988 \times 1/2.$$

### उदाहरणमाला १२

१। एक सम दंड  $AB$  का एक सिरा  $A$  एक चिकने क्षैतिज धरातल  $AC$  पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा  $B$  दूसरे धरातल  $CB$  पर जो

पहले धरातल से  $60^\circ$  का कोण बनाता है, रखा हुआ है। यदि दंड का भार  $W$  है और डोरी  $CA$ , जो  $CB$  के बराबर है दंड को फिसलने से रोकती है तो उसका तनाव मालूम करो।

२। एक सीढ़ी का एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा चिकने फर्श पर; यदि सीढ़ी का भार  $W$  है और वह क्षैतिज से  $60^\circ$  का कोण बनाती है, तो गणना तया लेखा-चित्र द्वारा मोड़ी के नीचे सिरे पर लगाये गये उस क्षैतिज बल को मालूम करो जो उसे फिसलने से रोकता है।

३। एक छड़, जिसका भार  $W$  है अपने गुरुत्व-केन्द्र  $C$  से दो भागों  $AC$  और  $BC$  में जिनकी लम्बाई क्रम से  $a$  और  $b$  हैं, बँधी हुई है। छड़ एक ऊर्ध्वाधर धरातल में हो जाती है जबकि उसका एक सिरा चिकने फर्श  $AD$  पर और दूसरा सिरा चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार  $DB$  पर होता है। एक डोरी  $D$  पर एक कटिया में और छड़ के एक बिन्दु  $P$  से बँधी हुई है। यदि डोरी का तनाव  $T$  है और क्षैतिज में छड़ और डोरी के झुकाव क्रम से  $\theta$  और  $\phi$  हैं, तो सिद्ध करो कि

$$T = W \frac{a \cos \theta}{(a+b) \sin(\theta - \phi)}$$

४। एक सीढ़ी का एक सिरा चिकने फर्श पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर। वह क्षैतिज से कोण  $\alpha$  बनाती है, नीचे का सिरा एक डोरी से बँधा हुआ है और डोरी उस जगह बँधी हुई है जहाँ दीवार और फर्श मिलते हैं; डोरी का तनाव मालूम करो।

डोरी का तनाव उस समय भी मालूम करो जबकि एक आदमी, जिसका भार सीढ़ी के भार का आधा है, सीढ़ी पर दो-तिहाई दूर तक चढ़ गया है।

५। एक सम छड़ का एक सिरा एक चिकने क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा, जिससे एक डोरी बँधी हुई है, एक दूसरे चिकने धरातल पर रखा हुआ है जो क्षैतिज से कोण  $\alpha$  बनाता है; डोरी अनन्त तल के निम्न पर स्थित एक घिरनी के ऊपर होकर

ऊर्ध्वाधर अवस्था में लटकते हुये एक भार  $P$  को सम्हाले हुये हैं ; छड़ का भार  $11'$  है, सिद्ध करो कि छड़ सब अवस्थाओं में समतुलित रहेगी यदि  $2P = 11'$  ज्या  $\alpha$ .

६। एक भारी सम छड़ के सिरे दो चिकने आनत तलों पर रखे हुये हैं जो एक क्षैतिज रेखा में मिलते हैं और जो क्षैतिज से कोण  $\alpha$  और  $\beta$  बनाते हैं ; समतुलित अवस्था में क्षैतिज से छड़ का झुकाव और तलों को प्रतिबल मालूम करो ।

७। एक सम छड़ का एक चिकना सिरा ऊर्ध्वाधर दीवार और भूमि के मिलने के स्थान पर रखा हुआ है । उसे एक डोरी सम्हाले हुये हैं जो छड़ के दूसरे सिरे और दीवार पर एक खूँटी से बंधी हुई है । डोरी का तनाव मालूम करो, और सिद्ध करो कि तनाव छड़ के भार का आधा होगा यदि डोरी की लम्बाई भूमि से खूँटी की ऊँचाई के बराबर हो ।

८। एक भारी सम दंड  $BC$  जिसका भार २ पी० है,  $B$  पर बरोक घूम सकता है ; उसे ४ इंच लम्बी एक डोरी  $AC$  सम्हाले हुये हैं । डोरी  $A$  बिन्दु से जो  $B$  से सीधी गई क्षैतिज रेखा में है बंधी हुई है ।  $AB$  की दूरी १० इंच है । यदि दंड की लम्बाई ६ इंच है, तो डोरी का तनाव मालूम करो । सीध कर तथा नाप कर अपने उत्तर की जाँच करो ।

९। एक सम दंड का ऊपरी सिरा एक कब्जे से लगा हुआ है और उसका दूसरा सिरा एक डोरी से बंधा हुआ है जो उसी क्षैतिज धरातल में जिसमें कब्जा है एक नियत बिन्दु से बंधी हुई है, डोरी की लम्बाई नियत बिन्दु और कब्जे के बीच की दूरी के बराबर है । यदि डोरी का तनाव दंड के भार के बराबर है, तो सिद्ध करो कि दंड क्षैतिज से कोण  $\text{स्पज्या}^{-1}\frac{1}{5}$  बनाता है, और कब्जे का प्रतिबल  $\frac{11'}{5}\sqrt{10}$  के बराबर है और क्षैतिज से कोण  $\text{स्पज्या}^{-1}\frac{1}{5}$  बनाता है ।

१०। एक दंड ऊर्ध्वाधर धरातल में सिरे पर लगे हुये एक कब्जे पर घूम सकता है और दूसरे सिरे पर दंड के भार के आधे के बराबर एक भार

बँधा हुआ है ; यह सिरा एक डोरी से सम्हाला जाता है जिसकी लम्बाई  $l$  है और जिसका दूसरा सिरा कब्जे से ऊर्ध्वाधर  $c$  ऊँचाई पर बँधा हुआ है ।

सिद्ध करो कि डोरी का तनाव  $\frac{WV}{c}$  है, जहाँ पर  $W$  दंड का भार है ।

११।  $AB$  एक सम दंड है जिसकी लम्बाई  $8a$  है और जो अपने नियत सिरे  $A$  पर बेंरोक घूम सकता है;  $C$  एक चिकना छल्ला है जिसका भार दंड के भार से दुगना है, और जो दंड पर सरक सकता है और एक डोरी  $CD$  द्वारा  $D$  से बँधा हुआ है जो उसी क्षैतिज धरातल में है जिसमें  $A$  है; यदि  $AD$  और  $CD$  दोनों की लम्बाइयाँ  $a$  हैं तो छल्ले का स्थान और डोरी का तनाव मालूम करो जबकि दंड समतुलित अवस्था में है ।

यह भी सिद्ध करो कि दंड के नियत बिन्दु  $A$  पर प्रतिबल  $\sqrt{3}W$  के बराबर एक क्षैतिज बल है जहाँ पर  $W$  दंड का भार है ।

१२। एक बिना भार का दृढ़ तार जिसका आकार केन्द्र पर कोण  $a$  बनाता हुआ वृत्त का एक चाप है, और जिसके सिरों पर दो भार  $P$  और  $Q$  लटके हुये हैं, एक क्षैतिज धरातल पर टिका हुआ है जबकि तारका उन्नतोदरत्त्व नीचे की ओर है; यदि उस सिरे पर खींची गई त्रिज्या जिस पर भार  $P$  लटका हुआ है ऊर्ध्वाधर से कोण  $\theta$  बनाती है तो सिद्ध करो कि

$$\sin \theta = \frac{Q \cos a}{P + Q \cos a}$$

१३। एक चिकने अर्द्ध गोलीय प्याले का एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार को स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है ; प्याले का व्यास  $a$  है ; एक भारी सम दंड क्षैतिज से  $60^\circ$  का कोण बनाता हुआ समतुलित अवस्था में रहता है यदि उसका एक सिरा प्याले के भीतरी पृष्ठ पर और दूसरा दीवार पर हो ; सिद्ध करो कि दंड की लम्बाई  $a + \frac{a}{\sqrt{13}}$  है ।

१४। एक बेलनाकार वर्तन, जिसकी ऊँचाई ४ इंच और व्यास ३ इंच है, एक क्षैतिज तल पर खड़ा है, और एक ३ इंच लम्बा सम दंड उसके भीतर

उसके किनारे से टिका हुआ रखा हुआ है। दंड और बर्तन के बीच का प्रतिबल मालूम करो, दंड का भार 6 औंस है।

१५। एक पतला छल्ला जिसकी त्रिज्या  $R$  है और भार  $W$  है, एक ऊर्ध्वाधर बेलन के चारों ओर रखा है और उसे गिरने से एक कील रोके हुये है जो बेलन से बाहर आड़ी निकली हुई है। बेलन और छल्ले के बीच के प्रतिबल मालूम करो।

१६। एक भारी गाड़ी के पहिये को, जिसका भार  $W$  है और जिसकी त्रिज्या  $r$  है, केन्द्र पर एक क्षैतिज बल  $F$  लगा कर एक खूँटे के ऊपर होकर खींचना है; यदि खूँटे की ऊँचाई  $h$  है तो सिद्ध करो कि  $F, W \frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$  से अधिक होगा।

१७। एक सम छड़ जिसकी लम्बाई  $2a$  है, समतुलित अवस्था में है जबकि उसका एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका हुआ है और उसकी लम्बाई का कोई बिन्दु एक चिकने क्षैतिज दंड पर रखा हुआ है। दंड दीवार के समानान्तर और दीवार से  $b$  की दूरी पर है। सिद्ध करो कि छड़ का झुकाव ऊर्ध्वाधर से  $\tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$  है।

१८। एक वृत्ताकार मंडल  $BCD$ , जिसकी त्रिज्या  $a$  और भार  $W$  है, एक हल्के और बारीक फीते से सधा हुआ है; फीता मंडल को चाप  $BCD$  के किनारे किनारे घेरे हुये है और उसके सिरे ऊर्ध्वाधर दीवार के बिन्दु  $A$  पर बंधे हुये हैं, उसका भाग  $AD$  दीवार का स्पर्श करता है और मंडल का घ्रातल दीवार पर लम्ब है। यदि फीते के उस भाग की लम्बाई जो मंडल को स्पर्श नहीं करती है  $2b$  हो, तो सिद्ध करो कि फीते का तनाव  $\frac{W}{2} \frac{a^2+b^2}{b^2}$  है, और  $D$  पर प्रतिबल मालूम करो।

१९। दो बराबरसम भारी सीधे दंड एक सिरे पर एक दूरी से जुड़े हुये हैं और वे एक ही क्षैतिज रेखा में दो चिकनी खूंटियों पर रखे हुये हैं,

एक दंड एक खूँटी पर है और दूसरा दूसरी पर ; यदि खूँटियों के बीच की दूरी प्रत्येक दंड की लम्बाई के बराबर हो और डोरी की लम्बाई इसकी आधी हो, तो सिद्ध करो कि दंड क्षैतिज से कोण  $\theta$  बनाते हैं जो 2 कोज्या  $\theta=1$  द्वारा दिया जाता है ।

२०। एक सम दंड, जिसका भार  $W$  है, दो वारीक डोरियों से सम्भला हुआ है। डोरियों के एक एक सिरे दंड के सिरों से बंधे हुये हैं और वे नियत चिकनी पिरनियों के ऊपर होकर जाती हैं और उनके दूसरे सिरों पर क्रमशः  $w_1$  और  $w_2$  भार लटके हुये हैं। सिद्ध करो कि दंड क्षैतिज से कोण

$$\cos^{-1} \frac{w_1^2 - w_2^2}{W \sqrt{2(w_1^2 + w_2^2)} - W^2}$$

बनाता है ।

२१। एक सम दंड, जिसका भार  $W$  है,  $2l$  लम्बी एक डोरी से जो उसके सिरों से एक चिकनी खूँटी के ऊपर होकर गुजरती हुई बंधी हुई है, समतुलित अवस्था में सधा हुआ है। यदि अब एक भार  $W'$  दंड के एक सिरे पर लगा दिया जाय तो सिद्ध करो कि खूँटी के ऊपर से डोरी की

$\frac{W'}{W+W'}$  लम्बाई सरका कर दंड एक दूसरे समतुलित अवस्था में रखा जा सकता है।

२२।  $AB$  एक सीधा दंड है, जिसकी लम्बाई  $2a$  और भार  $\lambda l$  है, और उसका नीचे का मिरा  $A$  भूमि पर ऊर्ध्वाधर दीवार  $AC$  के आधार पर रखा हुआ है ;  $B$  और  $C, A$  के ऊपर एक ही ऊर्ध्वाधर ऊँचाई  $2b$  पर हैं ; एक भारी छल्ला जिसका भार  $W$  है,  $2l$  लम्बी डोरी पर जो  $B$  और  $C$  को मिलाती है, बरोक सरका सकता है। यदि समुदाय समतुलित है अथवा छल्ला डोरी के मध्य-बिन्दु पर है, तो सिद्ध करो कि

$$l^2 = a^2 - b^2 \frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2}$$

२३। एक वर्गाकार तख्ता जिसकी भुजा  $b$  है, क्षैतिज अवस्था में  $OACO$  और  $OBDO$  डोरियों के दो दिये हुये पाशों से सधा हुआ है जो सम्मुख के कोनों के नीचे से गुजरते हुये एक नियत कटिया  $O$  से लटके हुये हैं ; डोरियों के तनाव मालूम करो जबकि तख्ते के ऊपर  $O$  की ऊँचाई  $h$  है।

२४। 100 पौ० भार का एक फाटक दो कब्जों पर लगा हुआ है, कब्जे फाटक के गुरुत्व-केन्द्र से 4 फुट दूरी पर एक ही ऊर्ध्वाधर रेखा में एक दूसरे से 3 फुट दूर हैं। यदि फाटक का सारा भार नीचे के कब्जे पर पड़ता है तो प्रत्येक कब्जे के प्रतिबल का परिमाण मालूम करो।

२५। तीन दंडों से बना हुआ एक त्रिभुज क्षैतिज अवस्था में नियत है और एक सम गोला उसपर रखा हुआ है ; सिद्ध करो कि दंडों के प्रतिबल उनकी लम्बाइयों के अनुपात में हैं।

२६। एक हल्का त्रिभुजीय ढाँचा ऊर्ध्वाधर धरातल में  $C$  की सबसे ऊपर किये हुये एक ही क्षैतिज रेखा में  $A$  और  $B$  दो आलम्बनों पर खड़ा है और  $C$  से 18 पौ० का भार लटका हुआ है। यदि  $AB=AC=18$  फुट और  $BC=5$  फुट, आलम्बनों पर प्रतिबल मालूम करो।

२७। एक त्रिभुजीय ढाँचे की भुजायें 13, 20, और 21 इंच लम्बी हैं ; सबसे बड़ी भुजा एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखी हुई है और सम्मुख के कोण से 63 पौ० का एक भार लटका हुआ है। मेज पर रखी हुई भुजा पर तनाव मालूम करो। खोब कर और नाप कर अपने उत्तर की जाँच करो।

२८। एक प्याला, जो  $\alpha$  त्रिज्या के एक खोसले गोले से बना है, इस प्रकार रखा हुआ है कि गोले की त्रिज्यायें जो उसके किनारे के प्रत्येक बिन्दु से खींची गई हैं ऊर्ध्वाधर से कोण  $\alpha$  बनाती हैं ; और वह त्रिज्या जो प्याले के एक बिन्दु  $A$  से खींची गई है ऊर्ध्वाधर से कोण  $\beta$  बनाती है। यदि एक चिकना सम दंड इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका



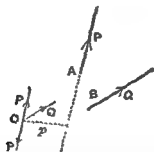
एक सिरा  $A$  पर है और उसकी लम्बाई का एक बिन्दु किनारे को छूता है, तो सिद्ध करो कि दंड की लम्बाई

$$4a \text{ जया } \beta \text{ व्युकोज्या } \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ है।}$$

८६—अगली धाराओं में समतुलन के वे नियम, जिनका वर्णन धारा ८३ में किया गया है, भिन्न प्रकार से मालूम किये गये हैं।

८७—साध्य। यदि एक घरास्तल में बलों का कोई समुदाय किसी पिंड पर कार्य करे, तो वह समुदाय पिंड के किसी अनियत बिन्दु पर कार्य करते हुये एक बल और एक बलयुग्म के बराबर होता है।

मान लो  $P$  समुदाय का कोई एक बल है जो पिंड के किसी बिन्दु  $A$  पर कार्य करता है, और मान लो  $O$  कोई अनियत बिन्दु है।  $O$  पर



दो बराबर और विपरीत बल, जिनमें से प्रत्येक का परिमाण  $P$  है, लगाओ और मान लो उनकी क्रिया-रेखाएँ  $P$  की प्रयोग रेखा के समानान्तर हैं। यह बल पिंड की समतुलित अवस्था में कोई परिवर्तन नहीं करते।

$A$  पर कार्य करता हुआ बल  $P$  और  $O$  पर कार्य करता हुआ समानान्तर विपरीत बल  $P$  एक बलयुग्म बनाते हैं जिसका घूर्ण  $P \cdot p$  है, जहाँ  $p$ ,  $O$  से मौलिक बल  $P$  की क्रिया-रेखा पर डाला गया

अतः  $A$  पर कार्य करता हुआ बल  $P$ ,  $O$  पर कार्य करते हुये समानान्तर बल  $P$  और एक बलयुग्म जिसका घूर्ण  $P.p$  है, के बराबर है।

इसी प्रकार  $B$  पर कार्य करता हुआ बल  $Q$ ,  $O$  पर कार्य करते हुये समानान्तर बल  $Q$  और एक बलयुग्म जिसका घूर्ण  $Q.q$  है, के बराबर है, जहाँ पर  $q, O$  से  $Q$  की क्रिया-रेखा पर डाला हुआ लम्ब है।

यही बात समुदाय के प्रत्येक बल के लिये सही है।

अतः बलों का मौलिक समुदाय  $O$  पर कार्य करते हुये बल  $P, Q, R, \dots$  जो मौलिक दिशाओं के समानान्तर हैं, और कुछ बलयुग्मों के बराबर हैं, और यह  $O$  पर कार्य करते हुये एक मात्र परिणामीबल तथा एक बलयुग्म जिसका घूर्ण  $P.p + Q.q + \dots$  है, के बराबर है।

८८\*—धारा ७४ के अनुसार एक बल और एक बलयुग्म समतुलित नहीं हो सकते जबतक कि उनमें से प्रत्येक शून्य न हो।

अतः  $O$  पर कार्य करते हुये बल  $P, Q, R, \dots$  का परिणामीबल शून्य होगा और इसलिये धारा ४६ से उनके विरहित भागों का योग दो दिशाओं के ऊपर पृथक् पृथक् शून्य होगा।

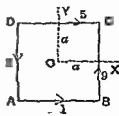
घूर्ण  $P.p + Q.q + \dots$  भी शून्य होगा अर्थात् किसी अनियत बिन्दु  $O$  पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग भी शून्य होगा।

८९\*—उदाहरण।  $ABCD$  एक वर्ग है; भुजाओं  $AB, BC, DC$  और  $DA$  के ऊपर १, ९, ५, और ३ पाँ० भार के बल कार्य करते हैं; वर्ग के केन्द्र से होकर गुजरता हुआ बल और वह बलयुग्म मालूम करो जो दिये हुये समुदाय के बराबर हो।

मान लो  $O$  वर्ग का केन्द्र है और  $OX$  और  $OY$  क्रम से भुजाओं  $BC$  और  $CD$  पर लम्ब हैं। मान लो वर्ग की भुजा  $2a$  है।

बल ९,  $OY$  पर कार्य करते हुये बल ९ और उस बलयुग्म के बराबर है जिसका घूर्ण  $9.a$  है।

बल ३,  $OY$  पर कार्य करते हुये बल  $-3$  और उस बलयुग्म के बराबर है जिसका घूर्ण  $3.a$  है।



बल 5,  $OX$  पर कार्य करते हुये बल 5 और उस बलयुग्म के बराबर है जिसका घूर्ण  $-5.a$  है।

बल 1,  $OX$  पर कार्य करते हुये बल 1 और उस बलयुग्म के बराबर है जिसका घूर्ण  $1.a$  है।

अतः परिणामी बलयुग्म का घूर्ण  $9a+3a-5a+1.a$  अर्थात्  $8.a$  है।

$OX$  पर अवयव बल 6 है और  $OY$  पर अवयव बल 6 है।

अतः परिणामी बल  $6\sqrt{2}$  पी० भार के बराबर है जो भुजा  $AB$  से  $45^\circ$  का कोण बनाता है।

### उदाहरणमाला १३

१। एक वर्ग पर 2, 4, 6, और 8 पी० भार के बल उसकी भुजाओं पर क्रमानुसार कार्य करते हैं; इन बलों का परिणामी बल और परिणामी बलयुग्म मालूम करो जबकि परिणामी बल वर्ग के केन्द्र में होकर जाता है।

२।  $ABCD$  एक वर्ग है,  $DA, AB, BC, CD$ , और  $DB$  पर बल  $P, 3P, 5P, 7P$ , और  $9\sqrt{2}P$  कार्य करते हैं,  $A$  से होकर गुजरता हुआ बल और बलयुग्म मालूम करो जो मिलकर समुदाय के बराबर हों।

३। 1, 2, 3, 4, 5, और 6 पी० भार के बल एक सम पट्टभुज की भुजाओं  $AB, BC, CD, DE, EF$  और  $FA$  पर क्रम से कार्य करते हैं,  $A$  से होकर गुजरता हुआ बल और बलयुग्म मालूम करो जो मिलकर समुदाय के बराबर हों।

४। यदि 10 पी० भार के एक बल का स्थान दिया हो और दो बलों के एक बलयुग्म, जिसमें से प्रत्येक बल 4 पी० भार के बराबर है और एक दूसरे में 2 इंच की दूरी पर है, का स्थान भी दिया गया हो, तो उनके बराबर एक मात्र बल को खींचो।

### नियंत्रित पिंड

१०.—गोरे पिंड नियंत्रित कहलाता है जबकि उसके एक अपर अधिक बिन्दु नियत हों। जैसे, उस दंड का, जो दीवार में आधार प्रोक्ष

(वाल-साकेट) द्वारा लगा हुआ है, एक बिन्दु नियत होता है और इसलिये वह नियंत्रित कहलाता है ।

यदि किसी दृढ़ पिंड के दो बिन्दु  $A$  और  $B$  नियत हों, तो  $AB$  रेखा में पिंड के सारे बिन्दु नियत होंगे और पिंड केवल  $AB$  को अक्ष मान कर उसके चारों ओर घूम सकता है । जैसे कोई दरवाजा जो दो कब्जों में लगा हुआ हो केवल कब्जों को मिलाने वाली रेखा के ही चारों ओर घूम सकता है ।

यदि किसी पिंड के तीन बिन्दु नियत हों और यह तीनों बिन्दु एक सीधी रेखा में न हों तो पिंड स्पष्टतः अचल रहता है ।

जिन स्थितियों पर हम विचार करेंगे वे यह हैं (१) जबकि पिंड का एक बिन्दु नियत है और उस बिन्दु में होकर गुजरते हुये धरातल में बलों का एक समुदाय उसपर कार्य करता हो, और (२) जबकि पिंड केवल अपने किसी नियत अक्ष के चारों ओर ही घूम सकता हो और उसपर बलों का वह समुदाय कार्य करता हो जिनकी दिशाएँ अक्ष पर लम्ब हों ।

९१—जब किसी दृढ़ पिंड का एक बिन्दु नियत हो और उस बिन्दु से होकर गुजरते हुये धरातल में बलों का कोई समुदाय उस पर कार्य करे, तो वह समतुलित होगा यदि बलों के घूर्णन का बीजीय योग नियत बिन्दु पर शून्य हो ।

जब किसी पिंड का एक बिन्दु  $A$  नियत हो (जैसा कि धारा ८५ के उदाहरण ४ में है), तो उस बिन्दु पर कोई नियंत्रित बल  $F$  कार्य करेगा, जो दिये हुये बलों के समुदाय के साथ समतुलित होगा । अतः धारा ८३ के समतुलन के नियम प्रयोग में आयेंगे ।

यदि हम दो लम्ब दिशाओं में बलों को विश्लिष्ट करें तो हमें  $F$  के परिमाण और दिशा मालूम करने के लिये दो समीकरण मालूम हो जायेंगे ।

यदि हम सब बलों के घूर्णन  $A$  पर लें, तो बल  $F$  (चूँकि वह  $A$  में होकर जाता है) हमारे समीकरण में नहीं आता, अतः धारा ८३ के घूर्णन का समीकरण एक ऐसा समीकरण हो जायगा जो इस बात को बतलावेगा कि  $A$  पर दिये हुये बलों के समुदाय के घूर्णन का बीजीय योग शून्य है ।

अतः पिंड के समतुलन के लिये (जबतक कि हम नियंत्रित बल  $F$  न निकालना चाहें) हमें केवल इतना ही व्यक्त करना है कि नियत बिन्दु  $A$  पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य है।

१२—उदाहरण। दंड  $AB$  का एक सिरा नियत है, और वह क्षैतिज अवस्था में  $10$  पौ० भार के एक बल से जो कि दंड से  $30^\circ$  का कोण बनाता है समतुलित अवस्था में रखा हुआ है; यदि दंड सर्वत्र सम है और उसकी लम्बाई  $4$  फुट है, तो उसका भार मालूम करो।

$A$  पर भार का घूर्ण  $A$  पर बल के घूर्ण के बराबर होगा।

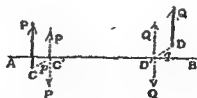
यदि  $W$  भार है, तो पहला घूर्ण  $W \times 2$  है और दूसरा  $10 \times 4$  ज्या  $30^\circ$  है।

$$\therefore 2W = 10 \times 4 \text{ ज्या } 30^\circ = 20.$$

$$\therefore W = 10 \text{ पौ० भार।}$$

१३—जब किसी दृढ़ पिंड का एक अक्ष नियत हो, और उस पर कुछ ऐसे बल कार्य कर रहे हों जिनकी दिशाएँ इस अक्ष पर लम्ब हों, तो वह समतुलित अवस्था में होगा यदि नियत अक्ष पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य हो।

[यदि कोई बल दिये हमें अक्ष पर लम्ब हो और उससे न मिलता हो तो अक्ष पर उसका घूर्ण, बल तथा अक्ष और बल के बीच की लम्ब दूरी का गुणनफल होता है।]



मान लो  $AB$  पिंड में नियत अक्ष है, और मान लो पिंड पर बल  $P, Q, \dots$  कार्य करते हैं; यह आवश्यक है कि यह बल समानान्तर हो परन्तु उनकी दिशाएँ अक्ष पर लम्ब होनी चाहिये।

अक्ष और  $P$  दोनों पर  $CC'$  लम्ब खींचो, और अक्ष और  $Q$  पर  $DD'$  लम्ब खींचो ; मान लो इनकी लम्बाइयाँ क्रमशः  $p$  और  $q$  हैं ।

$C'$  पर दो बराबर और विपरीत बल लगाओ जिनमें से प्रत्येक  $P$  के बराबर हो और इनमें से एक मौलिक बल  $P$  के समानान्तर हो ।

$C$  पर कार्य करता हुआ बल  $P$  और  $C'$  पर कार्य करते हुये दो बल  $(P, P)$  एक बल  $P$  के जो मौलिक बल  $P$  के समानान्तर है, और एक बल युग्म के जिसका घूर्ण  $P.p$  है, बराबर हैं ।

इसी प्रकार  $D$  पर कार्य करता हुआ बल  $Q$ ,  $D'$  पर कार्य करते हुये एक बल  $Q$  के और एक बल युग्म के जिसका घूर्ण  $Q.q$  है, बराबर हैं ।

इसी प्रकार से और बलों के लिये भी दिखलाया जा सकता है ।

बलों का पिंड को अक्ष के चारों ओर घुमाने में कोई प्रभाव नहीं होता क्योंकि यह अक्ष को काटते हैं, और यह अक्ष पर कार्य करते हुये नियंत्रित बलों से समतुलित हो जाते हैं ।

धारा ७२ और ७३ से ये बल युग्म उस एक बल युग्म के बराबर हैं जिसका घूर्ण  $P.p + Q.q + \dots$  है और जो अक्ष के घरातल के लम्ब घरातल में पड़ते हैं ।

अतः पिंड समतुलित होगा यदि  $P.p + Q.q + \dots$  शून्य हों और यह अक्ष पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग है ।

अतः साध्य सही है ।

१४—उदाहरण । एक वृत्ताकार सम मेज, जिसका भार 80 पौ० है चार बराबर बराबर पायों पर खड़ी है जो उसके किनारों पर सममित रूप से लगे हुये हैं ; वह कम से कम भार मालूम करो जो यदि मेज के किनार से लटकाया जाय तो मेज को ठीक उलट दे ।

मान लो  $AE$  और  $BF$  मेज के, जिसका केन्द्र  $O$  है, दो पाये हैं ; मेज का भार  $O$  पर कार्य करेगा ।

यदि भार मेज के उस भाग से जो  $A$  और  $B$  के बीच में है, लटकाया जाय तो मेज यदि वह तनिक भी उल्टेगी तो वह बिन्दु  $E$  और  $F$  को

मिलाने वाली रेखा पर ही उल्टेगी। और वह ठीक उलटने पर होगी जबकि भार और मेज के भार के घूर्ण  $EF$  पर बराबर हों।

भार का सबसे अधिक प्रभाव तब होगा जब वह चाप  $AB$  के मध्य-बिन्दु  $M$  पर रक्खा जाय।

मान लो  $OM$ ,  $AB$  को  $L$  पर मिलती हैं, और  $x$  इष्ट भार है। यदि  $EF$  पर घूर्ण लिया जाय तो  $AB$  पर घूर्ण लेनेवाला समीकरण आयेगा।

$$\therefore x.LM = 80.OL.$$

परन्तु  $LM = OM - OL = OA - OA \cos 45^\circ = OA \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

$$\therefore x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) OA = 80.OL = 80 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot OA,$$

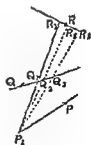
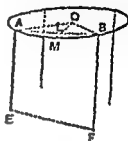
$$\therefore x = \frac{80}{\sqrt{2}-1} = 80(\sqrt{2}+1) = 193.1 \text{ पौं० भार।}$$

९५।—साध्य। यदि किसी पिंड पर कार्य करते हुये तीन बल पिंड को समतुलित रखें, तो वे एक ही घ्रातल में होंगे।

मान लो तीन बल  $P$ ,  $Q$ , और  $R$  हैं।

मान लो  $P$  और  $Q$  की क्रिया-रेखा पर  $P_1$  और  $Q_1$  कोई दो बिन्दु हैं।

चूँकि बल समतुलित हैं अतः उनका पिंड को  $P_1 Q_1$  रेखा के चारों ओर घुमाने में कोई प्रभाव नहीं हो सकता है। परन्तु बल  $P$  और  $Q$  इस रेखा को मिलते हैं और इसलिये इनका पिंड को  $P_1 Q_1$  के चारों ओर घुमाने में पृथक् पृथक् कोई प्रभाव नहीं हो सकता है। अतः तीसरे बल  $R$  का भी पिंड को  $P_1 Q_1$  के चारों ओर घुमाने में कोई प्रभाव नहीं होगा।



अतः  $P_1 Q_1$  रेखा  $R$  को अवश्य मिलेगी ।

इसी प्रकार, यदि  $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  की क्रिया-रेखा पर और बिन्दु हों, तो  $P_1 Q_2, P_1 Q_3, \dots, P_1 Q_n$  रेखाएँ  $R$  को अवश्य मिलेंगी ।

अतः  $R, P_1$  से जाते हुये धरातल में होगा और  $Q$  की क्रिया-रेखा अर्थात्  $Q$  और  $R$  की क्रिया-रेखाएँ उस धरातल में होंगी जो  $P_1$  में जाता है ।

परन्तु  $P_1, P$  की क्रिया-रेखा पर कोई बिन्दु है ; और इसलिये यह धरातल  $P$  की क्रिया-रेखा पर किसी भी बिन्दु से होकर गुजरेगा अर्थात् उस धरातल पर  $P$  की क्रिया-रेखा पड़ेगी ।

उपसाध्य । धारा ७७ से यह भी परिणाम निकलता है कि तीनों बल एक बिन्दु पर मिलेंगे अथवा समानान्तर होंगे ।

### उदाहरणमाला १४

१ । एक वर्गाकार सम प्लेट एक शीर्ष से लटका हुआ है, और प्लेट के भार के आधे भार के बराबर एक भार वर्ग के संलग्न शीर्ष में लटका हुआ है । प्लेट की समतुलित अवस्था मालूम करो ।

२ । एक खोखला ऊर्ध्वाधर बेलन, जिसकी त्रिज्या  $2a$  और ऊँचाई  $3a$  है, एक क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है, और एक सम दंड उसके भीतर इस प्रकार रखा है कि उसका नीचे का सिरा बेलन के आधार की परिधि पर है ; यदि दंड का भार बेलन के भार के बराबर है, तो बताओ दंड कितना लम्बा हो कि वह बेलन को ठीक उलट सके ।

३ । एक बेलन, जिसकी लम्बाई  $b$  है और जिसके आधार का व्यास  $c$  है, ऊपर से खुला हुआ है और एक क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है ; एक सम दंड बेलन के भीतर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका कुछ भाग उसके नीचे और ऊपर के किनारों को छूता है ; यदि बेलन का भार दंड के भार का  $n$  गुना है, तो दंड की लम्बाई मालूम करो जबकि बेलन ठीक उलटने की अवस्था में हो ।



४। एक वर्गाकार मेज चार पायों पर खड़ी है जो उसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं पर है ; वह महत्तम भार मालूम करो जो मेज को बिना उल्टे हुये उसके एक कोने पर रखा जा सके ।

५। एक गोल मेज लगे हुये बराबर दूरी पर किनारे पर तीन हल्के पायों पर खड़ी है, और जब एक आदमी एक पाये के सम्मुख किनारे पर बैठता है, तो मेज ठीक उलट जाती है और अपने किनारे पर दो पायों के बल गिर पड़ती है । फिर वह मेज के सबसे ऊँचे बिन्दु पर बैठता है और मेज को फिर उलट देता है । सिद्ध करो कि मेज की त्रिज्या एक पाये की लम्बाई की  $\sqrt{2}$  गुनी है ।

६। एक वृत्ताकार मेज के, जिसका भार 10 पौ० है, तीन ऊर्ध्वाधर पाये हैं जो बराबर बराबर दूरी पर उसकी परिधि के तीन बिन्दुओं पर लगे हुये हैं ; वह कम से कम भार मालूम करो जो यदि मेज के किनारे के किसी बिन्दु से लटकाया जाय तो मेज ठीक उलट जाय ।

७। एक चार पाये की वर्गाकार मेज का एक पाया नहीं है ; बताओ मेज के भार के बराबर मेज पर किस जगह एक भार रखा जाय कि मेज के शेष तीन पायों पर दबाव बराबर बराबर हो ?

८। एक वर्गाकार मेज, जिसका भार 20 पौ० है, के पाये उसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं पर हैं ; और तीन बराबर बराबर भार जिनमें से प्रत्येक मेज के भार के बराबर है उसके तीन शीपों पर रखे हुये हैं । बताओ कौन सा महत्तम भार उसके चौथे शीप पर रखा जाय कि मेज समतुलित अवस्था में रहे ?

९। सम मोटाई का एक वृत्ताकार धातु का प्लेट, जिसका भार  $w$  है, परिधि के किसी एक बिन्दु से लटका हुआ है । उसके किनारे से लिनट्री हुई एक डोरी भार  $p$  धामे हुये है । वह कोण मालूम करो जो लटकानेवाले बिन्दु से खींचा हुआ व्यास ऊर्ध्वाधर से बनाता है ।

१०। एक सम वृत्ताकार मंडल, जिसका भार  $M$  है, के किनारे के एक बिन्दु पर  $M'$  भार का एक कण लगा हुआ है । यदि किनारे के

किसी बिन्दु  $A$  से मंडल लटकाया जाता है तो  $B$  उसका सबसे नीचा बिन्दु होता है, और जब वह  $B$  से लटकाया जाता है तो  $A$  उसका सबसे नीचा बिन्दु होता है। सिद्ध करो कि  $AB$  द्वारा मंडल के केन्द्र पर बना हुआ कोण  $2$  व्युकोज्या- $\frac{1}{2}(n+1)$  होगा।

११। एक भारी क्षैतिज वृत्ताकार छल्ला परिधि के बिन्दु  $A, B$ , और  $C$  पर लगे हुये तीन आलम्बनों पर रखा हुआ है। यदि छल्ले का भार और त्रिभुज  $ABC$  की भुजायें और कोण दिये हों, तो आलम्बनों पर प्रतिबल मालूम करो।

## अध्याय ६

### गुरुत्व-केन्द्र

(Centre of Gravity)

९६—द्रव्य का प्रत्येक कण पृथ्वी के केन्द्र की ओर आकर्षित होता है, और हम गति विज्ञान में देखेंगे कि वह बल जिससे पृथ्वी किसी कण को अपनी ओर आकर्षित करती है कण की मात्रा का अनुपाती होता है ।

किसी भी पिंड को कणों का स्तूप मान सकते हैं ।

यदि कोई पिंड पृथ्वी की तुलना में छोटा हो, तो उसके अवयव कणों को पृथ्वी के केन्द्र से मिलाने वाली रेखाएँ लगभग समानान्तर होंगी, और इस पुस्तक में हम उन्हें पूर्ण रूप से समानान्तर मानेंगे ।

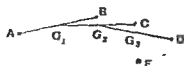
इसलिये किसी दृढ़ पिंड के प्रत्येक कण पर ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर एक बल कार्य करता है जिसे हम उसका भार कहते हैं ।

यह सभी बल, समानान्तर बलों के संयोजन करने की रीति धारा ५२ से, एक मात्र बल में संयोजित किये जा सकते हैं, जो कणों के भारों के योग के बराबर होता है और पिंड के किसी नियत बिन्दु पर कार्य करता है । इस नियत बिन्दु को पिंड का गुरुत्व-केन्द्र कहते हैं ।

गुरुत्व-केन्द्र । परिभाषा । किसी पिंड अथवा दृढ़ता पूर्वक सम्बद्ध कणों के समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र वह बिन्दु है जिससे होकर पिंड के भार की क्रिया रेखा हमेशा जाती है चाहे पिंड किसी भी स्थिति में क्यों न हो ।

९७—प्रत्येक पिंड अथवा दृढ़ता पूर्वक सम्बद्ध कणों के समुदाय का एक गुरुत्व-केन्द्र होता है ।

मान लो  $A, B, C, D, \dots$  कणों का एक समुदाय है जिनका भार  $w_1, w_2, w_3, \dots$  है।



$A, B$  को मिला दो और  $G_1$  पर इस प्रकार विभाजित करो कि  $AG_1 : G_1B :: w_2 : w_1$ .

अब  $A$  और  $B$  पर कार्य करते हुये समानान्तर बल  $w_1$  और  $w_2$ , धारा ५२ से,  $G_1$  पर कार्य करते हुये एक बल  $(w_1 + w_2)$  के बराबर हैं।

$G_1C$  को मिला दो और उसे  $G_2$  पर इस प्रकार विभाजित करो कि  $G_1G_2 : G_2C :: w_3 : w_1 + w_2$ .

अब  $G_1$  और  $C$  पर कार्य करते हुये समानान्तर बल  $(w_1 + w_2)$  और  $w_3$ ,  $G_2$  पर कार्य करते हुये बल  $(w_1 + w_2 + w_3)$  के बराबर हैं।

अतः  $w_1, w_2$ , और  $w_3$  बलों को, उनके प्रभाव को बिना बदले हुये,  $G_2$  पर कार्य करते हुये मान सकते हैं।

इसी प्रकार  $G_2D$  को  $G_3$  पर इस प्रकार विभाजित करो कि

$$G_2G_3 : G_3D :: w_4 : w_1 + w_2 + w_3.$$

हम देखते हैं कि  $A, B, C$ , और  $D$  पर कार्य करते हुये चार बलों का परिणामीबल  $G_3$  पर कार्य करते हुये ऊर्ध्वाधरबल  $w_1 + w_2 + w_3 + w_4$  के बराबर है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी पिंड के कणों के भारों को उनके प्रभाव को बिना बदले हुये पिंड के किसी बिन्दु पर कार्य करते हुये मान सकते हैं।

९८—चूंकि समानान्तर बलों के परिणामीबल के स्थान की रचना केवल प्रयोग-बिन्दु और परिमाण पर निर्भर है, न कि बलों की दिशाओं पर, इसलिये जो बिन्दु हमें अन्त में मिलता है वह वही रहेगा चाहे पिंड किसी भी

कोण पर क्यों न घुमा दिया जाय ; क्योंकि पिंड के भागों के भार फिर भी समानान्तर रहेंगे चाहे दोनों स्थितियों में पिंड के सापेक्ष उनकी दिशाएँ वेही न रहें ।

इसलिये हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि किसी पिंड का केवल एक ही गुरुत्व-केन्द्र होता है । क्योंकि यदि सम्भव हो तो मान लो उसके दो गुरुत्व-केन्द्र  $G$  और  $G_1$  हैं । अब यदि, आवश्यक हो तो, पिंड को इस प्रकार घुमाओ कि  $GG_1$  क्षैतिज हो जाय । अब  $G$  और  $G_1$  पर कार्य करते हुये ऊर्ध्वाधर बलों का परिणामोबल, चूँकि वह स्वयं अवश्य ही ऊर्ध्वाधर रहेगा, क्षैतिज रेखा  $GG_1$  में कार्य नहीं कर सकता ।

अतः पिंड का केवल एक ही गुरुत्व-केन्द्र हो सकता है ।

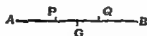
९९—यदि पिंड इतना छोटा न हो कि उसके अवयव भागों के सब भार लगभग समानान्तर समझे जा सकें, तो यह आवश्यक नहीं है कि उसका गुरुत्व केन्द्र हो ।

परन्तु प्रत्येक स्थिति में पिंड को उस बिन्दु के जो हमें धारा ९७ की रचना द्वारा प्राप्त होता है, बहुत आवश्यक गुण होते हैं और वह बिन्दु पिंड का जाडघ-केन्द्र अथवा जड़त्व-केन्द्र कहलाता है । यदि पिंड का घनत्व सम है तो उसका जाडघ-केन्द्र उसके केन्द्र व पर ही पड़ता है ।

१००—अब हम कुछ सरल रूप के पिंडों के गुरुत्व-केन्द्र निकालेंगे ।

(क) सम दंड ।

मान लो  $AB$  एक सम दंड है और  $G$  उसका मध्य-बिन्दु है ।



$G$  और  $A$  के बीच में दंड का कोई बिन्दु  $P$  और  $G$  और  $B$  के बीच में एक अन्य बिन्दु  $Q$  इस प्रकार लो कि

$$GQ = GP.$$

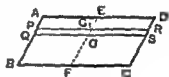
$P$  और  $Q$  के बराबर कर्णों का गुरुत्व-केन्द्र  $G$  है ; और  $G$  और  $A$  के बीच के प्रत्येक कर्ण के लिये  $G$  और  $B$  के बीच में  $G$  से बराबर दूरी पर एक दूसरा बराबर कर्ण होगा ।

कर्णों के ऐसे प्रत्येक जोड़ों का गुरुत्व-केन्द्र  $G$  पर है ; इसलिये पूर्ण दंड का गुरुत्व-केन्द्र  $G$  पर होगा ।

१०१—(ख) सम समानान्तर चतुर्भुज ।

मान लो  $ABCD$  एक समानान्तर चतुर्भुज है, और मान लो  $E$  और  $F$ ,  $AD$  और  $BC$  के मध्य-बिन्दु हैं ।

समानान्तर चतुर्भुज को बहुत से लम्बे मंकीर्ण खंडों में,  $AD$  के समानान्तर रेखाओं द्वारा, जिनमें से  $PR$  और  $QS$  कोई क्रमागत जोड़ा है, विभाजित करो । अब  $PQRS$  को एक सम सरल रेखा मान सकते हैं जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसके मध्य बिन्दु  $G_1$  पर है ।



इस प्रकार सब मंकीर्ण गण्डों का गुरुत्व-केन्द्र  $EF$  पर होगा, अतः पूर्ण चित्र का गुरुत्व-केन्द्र  $EF$  पर होगा ।

इसी प्रकार समानान्तर चतुर्भुज की  $AB$  के समानान्तर रेखाओं में विभाजित करके, हम देंगे कि गुरुत्व-केन्द्र  $AB$  और  $CD$  भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं के मिलाने वाली रेखा पर होगा ।

अतः गुरुत्व-केन्द्र इन दोनों रेखाओं के प्रतिच्छेद-बिन्दु  $G$  पर होगा ।

$G$  समानान्तर चतुर्भुज के विकर्णों का प्रतिच्छेद-बिन्दु भी है ।

१०२—पिछली दो धाराओं से यह स्पष्ट है कि यदि किसी सम पिंड में हम एक ऐसा बिन्दु  $G$  मान लें पर मकें कि पिंड उस बिन्दु पर समतुल्य होने लगे कर्णों के जोड़ों में विभाजित किया जा सके, तो  $G$  पिंड का गुरुत्व-केन्द्र होगा ।

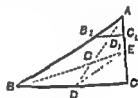
इसलिये किसी सम पृष्ठ अथवा सम गोले का गुरुत्व-केन्द्र उसी केन्द्र है ।

यह भी स्पष्ट है कि यदि हम किसी पटल को ऐसे लम्बे संकीर्ण खण्डों में विभाजित कर सकें जिन सबका गुरुत्व-केन्द्र एक सरल रेखा पर हो तो पटल का गुरुत्व-केन्द्र भी उसी सरल रेखा पर होगा ।

इसी प्रकार यदि कोई पिंड कुछ ऐसे भागों में विभाजित किया जा सके कि उन सबके गुरुत्व-केन्द्र एक ही धरातल में हों, तो पूर्ण पिंड का गुरुत्व-केन्द्र भी उसी धरातल में होगा ।

### १०३—(ग) सम त्रिभुजीय पटल ।

मान लो  $ABC$  त्रिभुजीय पटल है और मान लो  $BC$  और  $CA$  भुजाओं के मध्य-बिन्दु  $D$  और  $E$  हैं।  $AD$  और  $BE$  को मिला दो, और मान लो वे  $G$  पर मिलते हैं, तो  $G$  त्रिभुज का गुरुत्व-केन्द्र होगा ।



मान लो  $B_1C_1$ ,  $BC$  के समानान्तर कोई रेखा है जो  $AD$  को  $D_1$  पर मिलती है ।

समानान्तर चतुर्भुज की ही भाँति कोई त्रिभुज भी बहुत से संकीर्ण खण्डों से जैसे  $B_1C_1$ , जो सब आधार  $BC$  के समानान्तर हैं, बना हुआ माना जा सकता है ।

चूँकि  $B_1C_1$  और  $BC$  समानान्तर हैं इसलिये  $AB_1D_1$  और  $ABD$  समरूप त्रिभुज हैं, और  $AD_1C_1$  और  $ADC$  भी समरूप त्रिभुज हैं ।

अतः 
$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1C_1}{DC}.$$

किन्तु  $BD=DC$ ; इसलिये  $B_1D_1=D_1C_1$  अतः संकीर्ण खण्ड  $B_1C_1$  का गुरुत्व-केन्द्र  $AD$  पर होगा ।

इसी प्रकार सब संकीर्ण खण्डों के गुरुत्व-केन्द्र  $AD$  पर होंगे, अतः त्रिभुज का गुरुत्व-केन्द्र  $AD$  पर होगा ।

$BE$  को मिला दो और मान लो वह  $AD$  को  $G$  पर मिलता है ।







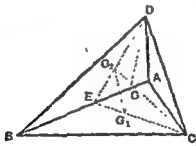
मान लो  $DE, A'B'$  को  $E'$  पर और  $DG, E'C'$  को  $G'$  पर मिलती है।

अब  $\frac{E'G'}{EG_1} = \frac{DG'}{DG_1}$ , समरूप त्रिभुजों  $D'E'G'$  और  $DEG_1$  से,  
 $= \frac{C'G'}{CG_1}$ , समरूप त्रिभुजों  $DG'C'$  और  $DG_1C$  से।

$$\therefore \frac{E'G'}{C'G'} = \frac{EG_1}{CG_1} = \frac{1}{2}.$$

अतः  $G'$  परिच्छेद  $A'B'C'$  का गुरुत्व-केन्द्र है।

चतुष्फलक को आधार  $ABC$  के समानान्तर त्रिभुजों से बना हुआ मान कर यह परिणाम निकलता है कि प्रत्येक त्रिभुज का गुरुत्व-केन्द्र  $DG_1$  रेखा पर होने के कारण कुल चतुष्फलक का गुरुत्व-केन्द्र भी  $DG_1$  पर होगा।



इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि गुरुत्व-केन्द्र  $G$  को सम्मुख फलक के गुरुत्व-केन्द्र  $G_2$  से मिलाने वाली रेखा पर है।  $G_2, ED$  रेखा पर भी है और उसे निम्नलिखित 1:2 में विभाजित करता है।

अतः इष्ट बिन्दु  $G, CG_2$  और  $DG_1$  का प्रतिच्छेद-बिन्दु है।

$G_1G_2$  को मिला दो, तो

$$\frac{G_2G}{GC} = \frac{G_1G_1}{DC}, \text{ समरूप त्रिभुजों } GG_2G_1 \text{ और } GCD \text{ से,}$$

$$= \frac{EG_1}{EC}, \text{ समरूप त्रिभुजों } EG_1G_2 \text{ और } ECD \text{ में,}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

$$\therefore GC = 3.G_2G,$$

$$\therefore G_2C = 4.G_2G.$$

$$\text{दूसरी प्रकार } G_1D = 4G_1G.$$

अतः चतुष्फलक का गुरुत्व-केन्द्र उस रेखा पर है जो उसके किसी फलक के गुरुत्व-केन्द्र को सम्मुख-शीर्ष में मिलाती है और फलक से इस दूरी की चौथाई के बराबर है।

उपस्थाप्य। किसी चतुष्फलक का गुरुत्व केन्द्र वही है जो उसके शीर्षों पर रखे हुये चार बराबर कणों का होता है।

क्योंकि त्रिभुज  $ABC$  के शीर्षों पर रखे हुये बराबर भार  $w$ , धारा १०४ में, उसके गुरुत्व-केन्द्र  $G_1$  पर रखे हुये भार  $3w$  के बराबर है। और  $G_1$  पर रखा हुआ भार  $3w$  और  $D$  पर रखा हुआ भार  $w$ ,  $G$  पर, जो  $G_1D$  को निष्पत्ति  $1:3$  में विभाजित करता है, रखे हुये भार  $4w$  के बराबर है।

१०७—(छ) किसी आधार पर सूची-स्तम्भ। ठोस शंकु।

पिछली धारा में यदि सूची-स्तम्भ का आधार त्रिभुज की जगह कोई समतल आकृति  $ABCLMN$  हो, जिसका गुरुत्व-केन्द्र  $G_1$  है, तो उन्हीं प्रकार से यह सिद्ध किया जा सकता है कि गुरुत्व-केन्द्र  $D$  को  $G_1$  से मिलाने वाली रेखा पर होगा।

धरातल  $DAG_1, DBG_1, \dots$  खींच कर सूची-स्तम्भ को बहुत से त्रिभुजीय आधार के सूची-स्तम्भों में विभाजित किया जा सकता है जिन सबके गुरुत्व-केन्द्र  $ABCL \dots$  के समानान्तर एक धरातल पर होंगे जिसकी  $D$  से दूरी धरातल  $ABC$  की दूरी की तीन चौथाई होगी।

अतः सूची-स्तम्भ का गुरुत्व केन्द्र  $G_1D$  पर होगा और उसे निष्पत्ति  $1:3$  में विभाजित करेगा।



उमकी गम भुजायें 7 डेन लम्बी हैं ; उमके शीर्षों से गुरुत्व-केन्द्र की दूरियां माप लो ।

४। त्रिभुज  $ABC$  के आधार  $BC$  का मध्य-बिन्दु  $D$  है ; सिद्ध करो कि त्रिभुज  $ABD$  और  $ACD$  के गुरुत्व-केन्द्रों के बीच की दूरी  $\frac{1}{2} BC$  है ।

५। एक भारी त्रिभुजीय प्लेट भूमि पर रखी हुई है ; यदि बिन्दु  $A$  पर कार्य करता हुआ एक ऊर्ध्वाधर बल उम शीर्ष की भूमि से ठीक उठा सकता है तो सिद्ध करो कि यदि वही बल  $B$  अथवा  $C$  पर लगाया जाय तो वह प्लेट को उठाने में पर्याप्त होगा ।

६। तीन आदमी एक भार  $W$  को एक बिन्दु पर त्रिभुजीय तल में जिसका भार  $w$  है, पर रख कर तथा तल के शीर्षों को अपने अपने कंधे पर रख कर ले जा रहे हैं , बताओ प्रत्येक आदमी कितना कितना भार सम्हालता है ।

७। एक त्रिभुज का आधार नियत है, और उसका शीर्ष एक ही वृत्त में सरल रेखा पर चलता है , सिद्ध करो कि उसका गुरुत्व-केन्द्र भी एक सरल रेखा पर चलेगा ।

८। एक त्रिभुज का आधार नियत है, और उसका शीर्ष-कोण भी दिया हुआ है ; सिद्ध करो कि उसका गुरुत्व-केन्द्र किसी वृत्त के चाप पर चलेगा ।

९। एक दिया हुआ भार एक त्रिभुज पर कहीं रखा हुआ है ; सिद्ध करो कि समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र किसी त्रिभुज के भीतर होगा ।

१०। एक समत्रिबाहु त्रिभुजीय प्लेट एक भुजा के ऐसे बिन्दु से, जो उस भुजा को  $2:1$  की निष्पत्ति में विभाजित करता है, बँधी हुई एक डोरी से लटकी हुई है ; इस भुजा का ऊर्ध्वाधर से झुकाव माप लो ।

११। एक समकोण त्रिभुज के रूप का एक सम पटल जो इस प्रकार है कि समकोण बनाती हुई भुजाओं में से एक दूसरी में तिगुनी है, समकोण से बँधी हुई एक डोरी से लटका हुआ है ; सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में कर्ण ऊर्ध्वाधर से कोण ज्या  $^{-1} \frac{3}{5}$  बनाता है ।

१२। एक सम त्रिभुजीय पटल जिसकी भुजायें 3, 4, और 5 इंच

है, सबसे बड़ी भुजा के मध्य बिन्दु से बंधी हुई डोरी से लटका हुआ है ; इस भुजा का ऊर्ध्वाधर से झुकाव मालूम करो ।

१०९—गुरुत्व-केन्द्र निकालने के व्यापक सूत्र ।

आगे की धाराओं में, वे सूत्र निकाले जायेंगे जिनसे उन कणों के किमी समुदाय के, जिनके स्थान और भार ज्ञात हों, गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम हो जायगा ।

साध्य—मदि कणों का कोई समुदाय, जिनके भार  $w_1, w_2, \dots, w_n$  है, एक सरल रेखा में हो, और मदि उनकी दूरियाँ रेखा के किमी नियत बिन्दु 'O' से  $x_1, x_2, \dots, x_n$  हो, तो नियत बिन्दु में उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी के  $x = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$  है ।

मान लो  $A, B, C, D, \dots$  कण हैं और मान लो  $A$  और  $B$  पर  $w_1$  और  $w_2$  का गुरुत्व-केन्द्र  $G_1$  है ; और मान लो  $G_1$  पर  $(w_1 + w_2)$  और



$C$  पर  $w_3$  का गुरुत्व-केन्द्र  $G_2$  है, और इसी प्रकार में समुदाय के और कणों के लिये भी है ।

घात ७ से,  $w_1 \cdot AG_1 = w_2 \cdot G_1 B$  ;

$$\therefore w_1 (OG_1 - OA) = w_2 (OB - OG_1).$$

अतः  $(w_1 + w_2) \cdot OG_1 = w_1 \cdot OA + w_2 \cdot OB,$

$$\therefore OG_1 = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w_1 + w_2} \dots \dots (1).$$

इसी प्रकार, चुंकि  $G_1$  पर  $(w_1 + w_2)$  और  $C$  पर  $w_3$  का गुरुत्व-केन्द्र

$$G_2 \text{ है, इसलिए, } OG_2 = \frac{(w_1 + w_2) \cdot OG_1 + w_3 \cdot OC}{(w_1 + w_2) + w_3}$$

$$= \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3}{w_1 + w_2 + w_3}, \dots (1) \text{ में.}$$

इसी प्रकार

$$OG_3 = \frac{(w_1 + w_2 + w_3) \cdot OG_2 + w_4 \cdot OD}{(w_1 + w_2 + w_3) + w_4}$$

$$= \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}.$$

इसी प्रकार में चाहे समुदाय के कणों की संख्या कुछ भी क्यों न हो,

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

अन्यथा : ऊपर का सूत्र धारा ६५ के प्रयोग से भी निकाला जा सकता है। क्योंकि कणों के भार समानान्तर बलों के एक समुदाय में पड़ते हैं जिनका परिणामीबल उनके योग अर्थात्  $w_1 + w_2 + \dots + w_n$  के बराबर है, और बलों के घ्रातल में किसी बिन्दु पर इन बलों के घूर्णों का योग वही है जो परिणामीबल का घूर्ण है। परन्तु नियत बिन्दु  $O$  पर बलों के घूर्णों का योग  $w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$  है। अतः यदि  $O$  से गुरुत्व-केन्द्र की दूरी  $\bar{x}$  है तो परिणामीबल का घूर्ण  $(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \times \bar{x}$  है।

$$\text{अतः } \bar{x} (w_1 + w_2 + \dots + w_n) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n;$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

११०—उदाहरण १। एक छड़  $AB$ , जिसकी लम्बाई २ फुट है और भार ५ पौ० है,  $C$  और  $D$  बिन्दुओं पर त्रिसमविभाजित है, और  $A, C, D$  और  $B$  बिन्दुओं पर क्रम से १, २, ३ और ४ पौ० के भार रखे हुये हैं, बताओ छड़ को किस बिन्दु से सहाल कि वह किसी भी अवस्था में समतुलित रहे अर्थात् समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

मान लो  $G$  छड़ का मध्य-बिन्दु है और पिछली धारा का नियत बिन्दु  $O$  छड़ के सिरे  $A$  पर पड़ता है। इस प्रकार  $x_1, x_2, x_3, x_4$  और  $x_5$  क्रम में ०, ८, १२, १६, और २४ इंच हैं।

अतः यदि  $x$  इष्ट बिन्दु है, तो

$$AX = \frac{1.0+2.8+5.12+3.16+4.24}{1+2+5+3+4} = \frac{220}{15} = 14\frac{2}{3} \text{ इंच।}$$

उदाहरण २। यदि पिछले प्रश्न में  $B$  पर रखा हुआ पिंड हटा दिया जाय और उसकी जगह एक दूसरा पिंड रख दिया जाय, तो इस अज्ञात पिंड का भार मालूम करो यदि नया गुरुत्व-केन्द्र छड़ के मध्य-बिन्दु पर हो।

मान लो इष्ट भार  $\lambda$  पौं० हैं।

चूँकि  $A$  से नये गुरुत्व-केन्द्र की दूरी 12 इंच है, इसलिये

$$12 = \frac{1.0+2.8+5.12+3.16+\lambda.24}{1+2+5+3+\lambda} = \frac{124+24\lambda}{11+\lambda}$$

$$\therefore 132+12\lambda = 124+24\lambda,$$

$$\therefore \lambda = 8 \text{ पौं०।}$$

उदाहरण ३। एक दंड के सिरे पर जिसकी लम्बाई 2 फुट है और भार 3 पौं० है एक गोला लगा हुआ है जिसकी द्रिज्या 2 इंच और भार 10 पौं० है; मिश्रित पिंड के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

मान लो  $OA$  दंड है,  $G_1$  उसका मध्य-बिन्दु है,  $G_2$  गोले का केन्द्र है और  $G$  इष्ट बिन्दु है, तो

$$OG = \frac{3.OG_1 + 10.OG_2}{3+10}$$

$$\text{परन्तु } OG_1 = 12 \text{ इंच; } OG_2 = 26 \text{ इंच;}$$

$$\therefore OG = \frac{3.12 + 10.26}{3+10} = \frac{296}{13} = 22\frac{4}{13} \text{ इंच।}$$

### उदाहरणमाला १६

१। एक सीधे दंड की लम्बाई 1 फुट और भार 1 औंस है। उसके एक सिरे पर एक औंस सीसा लगा हुआ है और उसके दूसरे सिरे



छट को लम्बाई की एक-तिहाई दूरी पर एक ओम और सीमा लगा हुआ है, समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

२। एक सम दंड जिसकी लम्बाई ३ फुट और भार ६ औं तीन तीन औं भाग के हैं, पर तीन छल्ले उसके एक सिरे में ३, १५, और २१ इंच की दूरी पर हैं। दंड किस बिन्दु पर समतुलित होगा ?

३। एक सम दंड  $AB$  ४ फुट लम्बा और ३ फुट भारी है। एक पाँच भार  $A$  पर, २ पाँच  $A$  में एक फुट की दूरी पर, ३ पाँच  $A$  में २ फुट की दूरी पर, ४ पाँच  $A$  में ३ फुट की दूरी पर और ५ पाँच  $B$  पर लगे हुये हैं।  $A$  में समुदाय के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

८। एक दूरबीन में तीन नलियां हैं, जिनमें में हर एक १० इंच लम्बी है। नलियां एक दूसरे के भीतर हैं, और उनके भार ८, ७, और ६ औं हैं। उनके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो जब नलियां पूरी पूरी खींच ली जायें।

५। एक सीधे दंड पर एक एक इंच की दूरी पर १२ भारी कण लगे हैं जिनके भार क्रम में १, २, ३, ..., १२ ग्राम हैं; दंड के भाग का नगण्य मान कर उसका गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

६। १, ४, ९, और १६ के अनुपात में भार एक सरल रेखा में इस प्रकार रखे हुये हैं कि उनके बीच की दूरियां बराबर हैं, उनके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

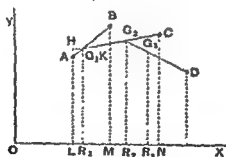
७। समान मोटाई के एक दंड की आधी लम्बाई एक धातु की और दूसरी आधी लम्बाई एक दूसरी धातु की है। दंड एक सिरे में अपनी लम्बाई की एक-तिहाई दूरी के एक बिन्दु पर समतुलित होता है। धातुओं के घनत्व बराबर परिमाणों के भारों की तुलना करो।

८। एक आनन तल, जिसका झुकाव  $60^\circ$  है, ३ फुट लम्बा है; उस पर एक एक फुट की दूरी पर क्रम में ७, ५, ४, और ८ औं के भार लगे हुये हैं जबकि अन्तिम भार सबसे ऊँचा है; आनन तल के आधार में उन भागों के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

९।  $AB$  एक सम दंड है जिसकी लम्बाई  $n$  इंच है और भार  $(n+1)W$  है।  $A$  में क्रमशः  $1, 2, 3, \dots, n$  इंच की दूरी पर भार  $W, 2W, 3W, \dots, nW$  लगे हुये हैं।  $A$  में दंड और भारों के गुरुत्व केन्द्रों की दूरी मालूम करो।

१०। 12 फुट लम्बे दंड के एक सिरे में 1 पौ० का एक भार लटका हुआ है, और जब दूसरे सिरे में 15 पौ० का भार लटकाया जाय तो वह उस सिरे में 3 फुट की दूरी के एक बिन्दु पर समतुलित होता है, परन्तु यदि उस सिरे पर 11 पौ० का भार लटकाया जाय तो उस सिरे से 4 फुट की दूरी के एक बिन्दु पर समतुलित होता है। दंड का भार और उसके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

१११—माध्य। यदि कणों का एक समुदाय, जिनके भार  $w_1, w_2, \dots, w_n$  हैं, एक घनत्व में हों, और यदि उस घनत्व में  $OX$  और  $OY$  दो नियत लम्ब रेखाएँ हों, और यदि  $OX$  में कणों की दूरियाँ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  हों, और उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी  $\bar{x}$  हो, तो



$$\bar{y} = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_n y_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

इसी प्रकार यदि  $OY$  में कणों की दूरियाँ  $y_1, y_2, \dots, y_n$  हों और उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी  $\bar{y}$  हो, तो

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

मान लो  $A, B, C, \dots$  कण हैं और  $AL, BM, CN, \dots OX$  पर लम्ब हैं।

मान लो  $w_1$  और  $w_2$  का गुरुत्व-केन्द्र  $G_1$  है,  $G_1$  पर  $(w_1 + w_2)$  और  $C$  पर  $w_3$  का गुरुत्व-केन्द्र  $G_2$  है, इत्यादि।

$OX$  पर  $G_1R_1, G_2R_2, \dots$  लम्ब खींचो, और  $G_1$  से होकर  $HG_1K, OX$  के समानान्तर खींचो जो  $AL$  और  $BM$  को  $H$  और  $K$  पर मिले।

क्योंकि  $G_1, w_1$  और  $w_2$  का गुरुत्व-केन्द्र है, इसलिये

$$\frac{AG_1}{G_1B} = \frac{w_2}{w_1} \quad (\text{धारा ९७}).$$

क्योंकि त्रिभुज  $AG_1H$  और  $BG_1K$  समरूप हैं,

$$\therefore \frac{HA}{BK} = \frac{AG_1}{G_1B} = \frac{w_2}{w_1}.$$

परन्तु  $HA = HL - AL = G_1R_1 - y_1$ ,

और  $BK = BM - KM = y_2 - G_1R_1$ ;

$$\therefore \frac{G_1R_1 - y_1}{y_2 - G_1R_1} = \frac{w_2}{w_1}.$$

अतः  $w_1(G_1R_1 - y_1) = w_2(y_2 - G_1R_1)$ ;

$$\therefore G_1R_1 = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2}{w_1 + w_2} \quad \dots \dots (1).$$

इसी प्रकार क्योंकि  $G_1$  पर  $(w_1 + w_2)$  और  $C$  पर  $w_3$  का गुरुत्व-केन्द्र  $G_2$  है, इसलिये

$$G_2R_2 = \frac{(w_1 + w_2) \cdot G_1R_1 + w_3 y_3}{w_1 + w_2 + w_3} = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3}{w_1 + w_2 + w_3}, \quad (1) \text{ से।}$$

इस प्रकार क्रिया करके

$$g = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_n y_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

पुन चूंकि त्रिभुज  $AG_1H$  और  $BG_1K$  समरूप हैं, इसलिये

$$\frac{HG_1}{G_1K} = \frac{AG_1}{G_1B} = \frac{w_2}{w_1}.$$

परन्तु  $HG_1 = LR_1 = OR_1 - OL = OR_1 - x_1$ ,  
 और  $G_1K = R_1M = OM - OR_1 = x_2 - OR_1$ .  
 $\therefore w_1 (OR_1 - x_1) = w_2 (x_2 - OR_1)$ .

अतः  $OR_1 = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w_1 + w_2}$ .

पहले की ही भाँति क्रिया करके अगले में

$$x = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

इस धारा के माध्य को इस प्रकार भी लिख सकते हैं ;

धरातल में किसी रेखा से कणों के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी एक मिल के बराबर है जिसका अंश प्रत्येक भार और दी हुई रेखा से उसकी दूरी के गुणनफल का योग और हर भाग का योग है, अर्थात् गुरुत्व केन्द्र की दूरी कणों की औसत दूरी के बराबर है ।

११२—पिछली धारा का सूत्र धारा ९३ से निकाला जा सकता है क्योंकि  $G$  पर कार्य करता हुआ परिणामी भार  $(w_1 + w_2 + \dots + w_n)$ , जहाँ पर  $G$  सब भारों का गुरुत्व-केन्द्र है, अवयव भारों  $w_1, w_2, \dots$  के बराबर है, अतः यदि रेखा  $OX$  नियत अक्ष मान ली जाय, तो परिणामी बल का इस नियत अक्ष पर वही घूर्ण होगा जो अवयव बलों का है ।

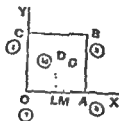
परन्तु परिणामी बल का घूर्ण  $(w_1 + w_2 + \dots + w_n)g$  है, और भारों के घूर्णों का योग  $w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_n y_n$  है ।

अतः  $g = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_n y_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$ .

इसी प्रकार  $x = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$ .

११३—उदाहरण १ । एक वर्गाकार पटल जिसका भार 10 पौं० है, के शीर्षों पर क्रम से 3, 6, 5, और 1 पौं० भार के कण रखे हुये हैं । समुदाय के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो, यदि पटल की भुजा 25 इंच है ।

मान लो कणों की दूरीयें  $O, A, B$ , और  $C$  पर रखे हुये हैं। मान लो दो नियत रेखायें जिनमें दूरियाँ नापी गई हैं,  $OA$  और  $OC$  हैं।



पटल का भार उसके केन्द्र  $D$  पर कार्य करता है। मान लो  $G$  इष्ट गुरुत्व-केन्द्र है।  $OX$  पर  $DL$  और  $GM$  लम्ब खींचो।

$OX$  से बिन्दु  $O, A, B, C$ , और  $D$  की दूरियाँ क्रम से 0, 0, 25, 25, और  $12\frac{1}{2}$  इंच हैं।

$$\therefore MG = \bar{g} = \frac{3.0 + 6.0 + 5.25 + 1.25 + 10.12\frac{1}{2}}{3 + 6 + 5 + 1 + 10} = \frac{275}{25} = 11 \text{ इंच।}$$

इसी प्रकार  $OY$  से कणों की दूरियाँ क्रमसे 0, 25, 25, 0, और  $12\frac{1}{2}$  इंच हैं।

$$\therefore OM = \bar{x} = \frac{3.0 + 6.25 + 5.25 + 1.0 + 10.12\frac{1}{2}}{3 + 6 + 5 + 1 + 10} = \frac{400}{25} = 16 \text{ इंच।}$$

अतः इष्ट बिन्दु  $O$  से  $OA$  पर 16 इंच नाप कर और फिर 11 इंच का लम्ब डाल कर मालूम किया जा सकता है।

उदाहरण २।  $OAB$  एक हल्का समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका आधार  $OA$ , 6 इंच है और जिसकी भुजायें प्रत्येक 5 इंच हैं,  $D, A$ , और  $B$  बिन्दुओं पर 1, 2, और 3 पा० भार के कण रखे हुये हैं; उनका गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

मान लो नियत रेखा  $OX, OA$  पर पड़ती है और मान लो  $OY, O$  से होकर  $AO$  पर लम्ब है।

यदि  $OA$  पर  $BL$  लम्ब डाला जाय, तो  $OL = 3$  इंच और  $LB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$  इंच।

अतः यदि  $G$  इष्ट गुरुत्व-केन्द्र है और  $GM, OX$  पर लम्ब है, तो

$$OM = \frac{1.0 + 2.6 + 3.3}{1 + 2 + 3} = \frac{21}{6} = 3\frac{1}{2} \text{ इंच,}$$

और  $MG = \frac{1.0 + 2.0 + 3.4}{1 + 2 + 3} = \frac{12}{6} = 2 \text{ इंच।}$

अतः इष्ट बिन्दु  $O$  में  $OA$  पर  $3\frac{1}{2}$  इंच नाप कर और फिर 2 इंच का लम्ब डाल कर मालूम हो जाता है।

११४—समानान्तर बलों का केन्द्र।

धारा १०९ और १११ के सूत्रों और रीतियों का प्रयोग केवल भारों में ही नहीं होगा परन्तु समानान्तर बलों में भी होता है और ऐसे बलों के समुदाय के परिणामीबल के स्थान के निकालने में भी होता है। परिणामी-बल परिमाण में बलों के योग के बराबर है, जबकि द्रव्यत्व बल के पहले उसका उचित निम्न रखा हो।

एक स्थिति ऐसी भी है जब हमें कोई मत्प्राप्तनक परिणाम नहीं मिलता है। यदि बलों का बीजीय योग शून्य हो तो परिणामीबल भी शून्य होगा और धारा १११ के सूत्र से  $x = \infty$ , और  $y = \infty$ ।

इस स्थिति में समानान्तर बलों का समुदाय, जैसा धारा ५३ में देखा आये है, एक बलशून्य के बराबर होगा।

### उदाहरणमाला १७

१। 1, 2, 3, और 4 पाँ० भार के कण एक वर्ग के शीर्षों पर रखे हुये हैं; वर्ग के केन्द्र में उसके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

२। ABCD वर्ग के A और C सम्मुख कोणों पर दो दो पाँड के भार और B और D पर क्रमसे 1 और 7 पाँ० के भार रखे हुये हैं; उनका गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

३। एक शक्तिज वर्ग के A, B, C, और D कोनों पर क्रम से 5, 6 lb, और 7 पाँ० भार के कण रखे हुये हैं, वर्ग की भुजा की लम्बाई 27 इंच है; बताओ कहीं पर एक मात्र बल लगाया जाय कि वर्ग समतुल्य रहे।

४। 1, 2, 3, 4, और 5 पी० के पाँच भार एक वर्गाकार मेज पर रमे हुये हैं। मेज के एक किनारे से इनकी दूरियाँ क्रमसे 2, 4, 6, 8, और 10 इंच हैं और मलग्न किनारे से 3, 5, 7, 9, और 11 इंच हैं। दोनों किनारों से उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

५। 1, 2, और 3 के अनुपात में भार एक समविबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा की लम्बाई  $a$  है, के कोनों पर, रखे हुये हैं; पहले भार से उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

उस समय भी दूरी मालूम करो जब भार 11, 13, और 6 के अनुपात में हों।

६।  $ABC$  एक समविबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा 2 फुट है।  $A, B$ , और  $C$  पर 5, 1, और 3 के अनुपात में और  $BC, CA$ , और  $AB$  भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं पर 2, 4, और 6 के अनुपात में भार रखे हुये हैं; सिद्ध करो कि उनका गुरुत्व-केन्द्र  $B$  से 16 इंच की दूरी पर है।

७। एक भारी त्रिभुजीय पटल के शीर्षों पर और उसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं पर एक एक ओस के भार रखे हुये हैं; भारों के गुरुत्व केन्द्र का स्थान मालूम करो।

८।  $ABC$  एक त्रिभुज है जो  $A$  पर समकोणिक है।  $AB$ , 12 इंच और  $AC$ , 15 इंच है; 2, 3, और 4 के अनुपात में भार  $A, C$ , और  $B$  पर रखे हुये हैं;  $B$  और  $C$  से उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

९। 4, 1, और 1 पी० भार के कण एक त्रिभुज के शीर्षों पर रखे हुये हैं; सिद्ध करो कि कणों का गुरुत्व-केन्द्र त्रिभुज के गुरुत्व-केन्द्र और एक शीर्ष के बीच की दूरी को समविभाजित करता है।

१०।  $ABC$  त्रिभुज के शीर्षों पर तीन भार रखे हुये हैं। बनाओ भारों में क्या निष्पत्ति होगी यदि उनका जड़त्व-केन्द्र  $A$  और  $BC$  के मध्य-बिन्दु के बीचोबीच हो।

११। 2, 3, और 4 पी० भार के पिंड त्रिभुज के शीर्षों  $A, B$ ,

और  $C$  पर रखे हुये हैं ; उनका गुरुत्व केन्द्र  $G$  मालूम करो और सिद्ध करो कि बल  $2GA$ ,  $3GB$ , और  $4GC$  समतुलित है ।

१२।  $ABC$  एक समत्रिभुजीय प्लेट है जिसका भार ३ पौं० है । २, ३, और ५ पौं० के भार क्रम से  $A$ ,  $B$ , और  $C$  पर रखे हुये हैं । समुदाय के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो ।

१३। एक सम त्रिभुजीय प्लेट के शीर्ष  $A$ ,  $B$ , और  $C$  पर २, २, और ११ पौं० भार के कग रखे हुये हैं ; प्लेट का भार ३ पौं० है और उसका गुरुत्व-केन्द्र  $G$  है ; सिद्ध करो कि समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र  $GC$  का मध्य-बिन्दु है ।

१४। २, ३, २, ६, ९ और १ पौं० के भार क्रम से एक सम पट्भुज के शीर्षों पर रखे हुये हैं ; उनका गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।

१५। ५, ४, ६, २, ७, और ३ के अनुपात में भार क्रम से एक सम पट्भुज के शीर्षों पर रखे हुये हैं ; सिद्ध करो कि उनका गुरुत्व केन्द्र पट्भुज का केन्द्र है ।

१६। १, ५, ३, ४, २, और ६ के अनुपात में भार क्रम से एक सम पट्भुज के शीर्षों पर रखे हुये हैं ; सिद्ध करो कि उनका गुरुत्व-केन्द्र पट्भुज का केन्द्र है ।

१७। यदि १, २, ३, ४, ५, और ६ के अनुपात में भार क्रम से एक सम पट्भुज के शीर्षों पर रखे हुये हैं तो सिद्ध करो कि उनके गुरुत्व-केन्द्र की पट्भुज के बाह्य-वृत्त के केन्द्र से दूरी वृत्त की त्रिज्या की ३ गुनी है ।

१८। एक वर्ग के शीर्षों पर, क्रमसे १:३:५:७ की निष्पत्ति में समानान्तर बल कार्य करते हैं ; वर्ग के केन्द्र से उस बिन्दु की दूरी मालूम करो जहाँ पर उनका परिणामी बल कार्य करता है ।

१९।  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , और  $D$  क्रम में एक समानान्तर चतुर्भुज के कोण हैं, ६, १०, १४, और १० के अनुपात में सम समानान्तर बल क्रम से  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , और  $D$  पर कार्य करते हैं ; सिद्ध करो कि इन समानान्तर बलों का केन्द्र और परिणामी बल वही रहेगा यदि इन बलों की जगह ८, १२, १६, और ४ के



में समानान्तर बल क्रम में  $AB, BC, CD$ , और  $DA$  भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं पर कार्य करें।

२०। समानान्तर बल  $P, 2P, 3P, 4P, 5P$ , और  $6P$  का केन्द्र मान्नु करों, जिनके प्रयोग-बिन्दु  $AB$  रेखा पर दिये हुये बिन्दु  $A$  से क्रम से 1, 2, 3, 4, 5, और 6 इंच की दूरी पर हैं।

२१। एक त्रिभुज के  $A, B$ , और  $C$  शीर्षों पर  $P, Q$ , और  $R$  तीन समानान्तर बल जो क्रम से  $a, b$ , और  $c$  के अनुपात में हैं, कार्य करते हैं। उनके परिणामीबल का परिमाण और स्थान मालूम करो।

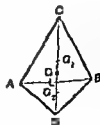
११५—यदि किसी पिंड के दो भागों के गुरुत्व-केन्द्र दिये हुये हों, तो पूरे पिंड का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करना।

मान लो दिये हुये गुरुत्व-केन्द्र  $G_1$  और  $G_2$  हैं, और मान लो इन भागों के भार  $W_1$  और  $W_2$  हैं; धारा ९७ में इष्ट बिन्दु  $G, G_1G_2$  को इस प्रकार विभाजित करता है कि  $G_1G : GG_2 :: W_2 : W_1$ ।

बिन्दु  $G$  धारा १०९ के प्रयोग से भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण। एक ही आधार  $AB$  पर विपरीत दिशाओं में समद्विबाहु त्रिभुज  $CAB$  और  $DAB$  खींचे गये हैं जिनकी ऊँचाइयाँ क्रम से 12 और 6 इंच हैं।  $AB$  से चतुर्भुज  $CADB$  के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

मान लो  $AB$  पर  $CLD$  लम्ब है जो उसे  $L$  पर मिलता है, और मान लो दोनों  $CAB$  और  $DAB$  त्रिभुजों के गुरुत्व-केन्द्र क्रम से  $G_1$  और  $G_2$  हैं। अतः  $CG_1 = \frac{1}{3} \cdot CL = 8$ , और  $CG_2 = CL + LG_2 = 12 + 2 = 14$ ।



त्रिभुजों के भार उनके क्षेत्रफलों, अर्थात्  $\frac{1}{2}AB \cdot 12$  और  $\frac{1}{2}AB \cdot 6$  के अनुपात में हैं।

∴ यदि पूरे चित्र का गुरुत्व-केन्द्र  $G$  है, तो

$$CG = \frac{\triangle CAB \times CG_1 + \triangle DAB \times CG_2}{\triangle CAB + \triangle DAB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} AB \cdot 12 \times 8 + \frac{1}{2} AB \cdot 6 \times 14}{\frac{1}{2} AB \cdot 12 + \frac{1}{2} AB \cdot 6} = \frac{48 + 42}{6 + 3} = \frac{90}{9} = 10.$$

अतः  $LG = CL - CG = 2$  इंच।

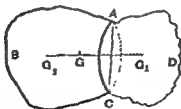
पतल काटबोर्ड में चित्र काट कर परिमाण की जाँच प्रयोगात्मक रीति से की जा सकती है।

११६—यदि पूरे पिंड और उसके एक भाग के गुरुत्व-केन्द्र दिये हुये हों, तो शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करना।

मान लो पिंड  $ABCD$  का गुरुत्व-केन्द्र  $G$  है और भाग  $ADC$  का गुरुत्व-केन्द्र  $G_1$  है।

मान लो पूरे पिंड का भार  $W$  है और  $ADC$  भाग का भार  $W_1$  है, तो  $ABC$  भाग का भार  $W_2 (= W - W_1)$  होगा।

मान लो भाग  $ABC$  का गुरुत्व-केन्द्र  $G_2$  है। चूंकि पिंड के दोनों भाग मिलकर पूरा पिंड बनाते हैं इसलिये  $G_1$  पर  $W_1$  और  $G_2$  पर  $W_2$  का गुरुत्व-केन्द्र  $G$  पर होगा।



अतः  $G, G_1, G_2$  पर इस प्रकार होगा कि  $W_1 \cdot GG_1 = W_2 \cdot GG_2$ .

अतः यदि  $G$  और  $G_1$  दिये हुये हों, तो हम  $G_2$  मालूम कर सकते हैं यदि  $G_1G$  को  $G_2$  तक इस प्रकार बढ़ाये कि

$$GG_2 = \frac{W_1}{W - W_1} \cdot GG_1 = \frac{W_1}{W - W_1} \cdot GG_1$$

दृष्ट बिन्दु धारा १० के द्वारा भी मान्यमान किया जा सकता है।

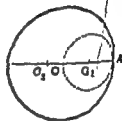
उदाहरण १। एक वृत्तीय मंडल में  $m_1$  त्रिज्या  $r$  है,  $m_2$  वृत्त काटा गया है त्रिज्या  $r$  का मंडल की एक त्रिज्या है; शेष का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

क्योंकि वृत्तों के क्षेत्रफल उनकी त्रिज्याओं के वर्गों के अनुपात में हैं, इसलिए

कटे हुए भाग का क्षेत्रफल : पूरे वृत्त का क्षेत्रफल

$$\therefore \left(\frac{r}{2}\right)^2 : r^2$$

$$\therefore 1 : 4.$$



अतः कटा हुआ भाग पूरे का एक-चौथाई है और शेष भाग पूरे का तीन-चौथाई है, इसलिये  $11'_1 = \frac{3}{4} 11'_2$ .

अब भाग  $11'_1$  और  $11'_2$  मिलकर पूरा मंडल बनाते हैं; इसलिये वे  $O$  पर समतुलित हैं। अतः

$$11'_1 \cdot OG_1 = 11'_2 \cdot OG_2 = \frac{3}{4} 11'_2 \times \frac{1}{2} r,$$

$$\therefore OG_2 = \frac{1}{4} r.$$

इसकी प्रयोगात्मक रीति में जाँच की जा सकती है।

उदाहरण २। एक त्रिभुजिय फल  $ABC$  से उसके आधार  $BC$  के समानान्तर रेखा द्वारा उसके क्षेत्रफल का एक चौथाई भाग काट लिया गया है; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

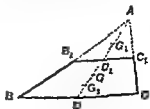
मान लो  $AB_1C_1$  भाग काट लिया गया है,

$$\therefore \triangle AB_1C_1 : \triangle ABC :: 1 : 4.$$

ज्यामिति से, क्योंकि त्रिभुज  $AB_1C_1$

और  $ABC$  समरूप हैं,

$$\therefore \triangle AB_1C_1 : \triangle ABC :: AB_1^2 : AB^2,$$



$$\therefore AB_1^3 : AB^3 :: 1 : 4,$$

और इसलिये  $AB_1 = \frac{1}{2} AB$ .

इसलिये रेखा  $B_1G_1, AB, AC$ , और  $AD$  को समविभाजित करती है।

मान लो  $G$  और  $G_1$  क्रमसे त्रिभुज  $ABC$  और  $AB_1C_1$  के गुरुत्व-केन्द्र हैं ; और मान लो  $W_1$  और  $W_2$  क्रमसे कटे हुये भाग और शेष भाग के भार हैं, तो  $W_2 = 3W_1$ .

क्योंकि  $G_1$  पर  $W_2$  और  $G$  पर  $W_1$ ,  $G$  पर समतुलित है , इसलिये पारा १०९ से,

$$DG = \frac{W_1 \cdot DG_1 + W_2 \cdot DG_2}{W_1 + W_2} = \frac{DG_1 + 3DG_2}{4} \quad \dots (१).$$

परन्तु  $DG = \frac{2}{3} DA = \frac{2}{3} DD_1$ ,

और  $DG_1 = DD_1 + \frac{1}{3} D_1A = DD_1 + \frac{1}{3} DD_1 = \frac{4}{3} DD_1$ .

अतः (१) से  $4 \times \frac{2}{3} DD_1 = \frac{4}{3} DD_1 + 3DG_2$ .

$$\therefore DG_2 = \frac{1}{3} DD_1.$$

इस परिमाण की प्रयोगात्मक रीति से भी सरलतापूर्वक जाँच की जा सकती है।

### उदाहरणमाला १८

[विद्यार्थी को चाहिये कि निम्नलिखित प्रश्नों में से कुछ प्रश्नों की प्रयोगात्मक रीति से जाँच करे; इसके लिये उपयुक्त प्रश्न संख्या १, २, ४, ५, ८, ९, १०, ११, १७, १८, और १९ हैं।]

१। एक सम दंड, जिसकी लम्बाई एक फुट है, ५ और ७ इंच के दो भागों में तोड़ कर अक्षर T के रूप में रखा गया है, बड़ा भाग ऊर्ध्वाधर है ; समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

२। एक ही कांडंबोर्ड के दो आयताकार टुकड़े, जिनकी लम्बाई क्रम से ६ इंच और ८ इंच और चौड़ाई २ और २½ इंच हैं, एक दूसरेको स्पर्श करते हुये ( न कि ढँकते हुये ) एक मेज पर T रूप का चित्र बनाते हुये

रखे हुये हैं, बड़ा भाग ऊर्ध्वाधर है । उनके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो ।

३ । एक भारी छड़ के दो भाग हैं, जिनकी लम्बाईयां 3:5 और जिनके भार 3:1 की निष्पत्ति में हैं ; उनके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो ।

४ । एक आयन की दो भुजायें दूसरी दो भुजाओं से दुगुनी हैं और बड़ी भुजाओं में से एक पर एक समद्विबाहु त्रिभुज खींचा गया है ; आयन और त्रिभुज में घने हुये पट्ट का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।

५ । काईबोर्ड का एक टुकड़ा ABCD एक वर्ग और उसकी भुजा BC पर खींचे गये एक समद्विबाहु त्रिभुज के रूप में है ; यदि वर्ग की भुजा 12 इंच और त्रिभुज की ऊँचाई 6 इंच है तो AD रेखा से काईबोर्ड के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो ।

६ । एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की सब भुजाओं पर बाहर की ओर धर्म खींचे हुये हैं । सिद्ध करो कि इस प्रकार बने हुये त्रिभुज का गुरुत्व-केन्द्र उस रेखा पर है जो कर्ण को समविभाजित करती है और समकोण से होकर गुजरती है और उसे 1:26 की निष्पत्ति में विभाजित करती है ।

७ । एक ही धातु के दो सम गोल, जिनके व्यास क्रम में 6 और 12 इंच हैं, जुड़े हुये हैं ; उनके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो ।

८ । एक समानान्तर चतुर्भुज में से उन चार भागों में से एक भाग काट दिया गया है जिनमें उनके कर्ण उसे विभाजित करते हैं ; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।

९ । एक समानान्तर-चतुर्भुज को भुजाओं के मध्य-बिन्दु मिलाकर चार भागों में विभाजित किया गया है और उनमें से एक भाग काट दिया गया है ; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।

१० । एक वर्ग में एक त्रिभुजीय भाग वर्ग की दो संलग्न भुजाओं को मिलाने वाली रेखा पर से काट कर अलग कर दिया गया है ; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।

११। एक त्रिभुज में से उसके क्षेत्रफल का  $\frac{1}{3}$  भाग आधार के समानान्तर एक रेखा से काट दिया गया है ; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।

१२।  $ABC$  एक समत्रिबाहु त्रिभुज है, जिसकी भुजा 6 इंच है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र  $O$  है । यदि त्रिभुज  $OBC$  काट दिया जाय, तो शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।

१३। यदि त्रिभुज  $ABC$  में तीन बराबर बराबर त्रिभुज  $ARQ$ ,  $BPR$ , और  $CQP$  काट दिये जायें, तो सिद्ध करो कि त्रिभुज  $ABC$  और  $PQR$  के जड़त्व-केन्द्र एक ही होंगे ।

१४।  $G$  एक दिये हुये समत्रिबाहु त्रिभुज का गुरुत्व-केन्द्र है जो  $A$  पर समकोणिक है और जिसमें  $BC$ ,  $a$  के बराबर है । भाग  $GBC$  काट दिया गया है ; शेष भाग के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी  $A$  से मालूम करो ।

१५। दो त्रिभुज  $ABC$  और  $A'BC$  एक ही आधार  $BC$  पर बने हैं, शीर्ष  $A'$  पहले त्रिभुज के भीतर है ।  $A'$  का स्थान मालूम करो यदि वह दोनों त्रिभुजों के बीच के क्षेत्रफल का गुरुत्व-केन्द्र हो ।

१६। दो त्रिभुज, जिनमें से प्रत्येक पूरे त्रिभुज का  $\frac{1}{m}$  भाग है, एक दिये हुये त्रिभुज के दो शीर्षों  $B$  और  $C$  में सम्मुख की भुजाओं के समानान्तर रेखाओं से काट दिये गये हैं ; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।

१७। बताओ एक वर्गाकार प्लेट में से किस प्रकार वर्ग की भुजा की आधार मान कर एक त्रिभुज काटा जाय कि शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र इस त्रिभुज के शीर्ष पर हो अर्थात् यदि वह इस बिन्दु में साधा जाय तो किन्ना भी अवस्था में समतुलित रहे ।

१८। एक 10 इंच वर्ग धातु के सम प्लेट में से एक 3 वर्ग इंच का छेद कटा हुआ है । छेद का केन्द्र प्लेट के केन्द्र में 2 $\frac{1}{2}$  इंच दूर है ; प्लेट के शेष भाग के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो ।

१९। 3 फुट त्रिज्या के एक वृत्तीय मंडल में किम् जगह एक

फुट त्रिज्या का छेद काटा जाय कि शेष का गुरुत्व-केन्द्र मंडल के केन्द्र से 2 इंच दूर हो ?

२०। दो गोले, जिनकी त्रिज्यायें  $a$  और  $b$  हैं, एक दूसरे को अन्तःस्पर्श करते हैं ; दोनों के बीच के भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

२१। यदि एक सम शंकु को एक धरातल द्वारा ऊँचाई की समविभाजित करते हुये समकोण पर काट दिया जाय, तो इस प्रकार कटे हुये छिन्न के गुरुत्व-केन्द्र की शंकु के शीर्ष से दूरी मालूम करो।

२२। समाश्रित लोहे का एक ठोस समवृत्तीय शंकु, जिसकी ऊँचाई 64 इंच और भार 8192 पी० है, अक्ष के लम्ब धरातल से इस प्रकार काटा गया है कि कटे हुये छोटे शंकु का भार 686 पी० है ; कटे हुये छिन्न के गुरुत्व-केन्द्र की आधार से ऊँचाई मालूम करो।

२३। एक ठोस समवृत्तीय शंकु का आधार इस प्रकार खोदा गया है कि खोखला भाग उभी आधार पर एक सम शंकु बन जाता है ; बताओ शंकु कितना खोदा जाय कि शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र खोखले के शीर्ष पर हो ?

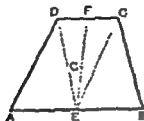
२४। चाँद की मात्रा पृथ्वी की, माथा की 0.13 गुनी है। पृथ्वी की त्रिज्या 4000 मील और चाँद के केन्द्र से पृथ्वी के केन्द्र की दूरी पृथ्वी की त्रिज्या की 60 गुना मान कर, पृथ्वी और चाँद के गुरुत्व-केन्द्र को पृथ्वी के केन्द्र से दूरी मालूम करो।

### ११७—अर्द्धगोले का गुरुत्व-केन्द्र।

यदि अर्द्धगोले की त्रिज्या  $r$  है, तो उसका गुरुत्व-केन्द्र उस त्रिज्या पर होगा जो उसके समतल फलक पर लम्ब है और समतल फलक के केन्द्र से उसकी दूरी  $\frac{3r}{8}$  होगी। यदि अर्द्धगोला खोखला हो, तो यह दूरी  $\frac{r}{2}$  होगी। प्रारम्भिक रीति में इनके प्रमाण कठिन हैं, अतः वे अन्तिम अध्याय में दिये गये हैं।

११८—उस चतुर्भुज फलक का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करना जिसकी दो भुजायें समानान्तर हैं।

मान लो  $ABCD$  चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ  $AB$  और  $CD$  समानांतर हैं और क्रम से  $2a$  और  $2b$  के बराबर हैं।



मान लो  $AB$  और  $CD$  के मध्य-बिन्दु  $E$  और  $F$  हैं।  $DE$  और  $EC$  को मिला दो।  $ADE$ ,  $DEC$ , और  $BEC$  त्रिभुजों के क्षेत्रफल उनके आधार  $AE$ ,  $DC$ , और  $EB$  अर्थात्  $a$ ,  $2b$ , और  $a$  के अनुपात में हैं।

त्रिभुजों की जगह उनके क्षीपों पर उनके भार के एक तिहाई भार के बराबर रखो (पारा १०४)।

इस प्रकार  $C$  और  $D$  पर  $\frac{a}{3} + \frac{2b}{3}$  के अनुपात में,  $A$  और  $B$  पर  $\frac{a}{3}$  के अनुपात में और  $E$  पर  $\frac{2a}{3} + \frac{2b}{3}$  के अनुपात में भार हैं।

अब  $C$  और  $D$  पर रखे हुये बराबर भारों को  $CD$  के मध्य-बिन्दु  $F$  पर  $\frac{2a}{3} + \frac{4b}{3}$  के अनुपातीय, और  $A$  और  $B$  पर रखे हुये बराबर भारों को  $E$  पर  $\frac{2a}{3}$  के अनुपातीय भार से बदल दो।

इस प्रकार  $F$  पर  $\frac{2a}{3} + \frac{4b}{3}$  का अनुपातीय और  $E$  पर  $\frac{4a}{3} + \frac{2b}{3}$  का अनुपातीय भार हो जायेगा।

अतः दृष्ट गुरुत्व-केन्द्र  $G$  सरल रेखा  $EF$  पर इस प्रकार है कि

$$\frac{EG}{GF} = \frac{F \text{ पर भार}}{E \text{ पर भार}} = \frac{a+2b}{2a+b}$$



## उदाहरणमाला १६

१। एक त्रिभुजीय मेज अपने शीशों पर लगे पायों पर खड़ी है 6, 8, और 10 फी० के भार उसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं पर रखे हैं। बताओ इन भारों से उसके पायों पर कितना दबाव बढ़ जायगा।

२। एक पन्धरे सम तार के टुकड़े को  $ABCD$  एक चतुर्भुज के रूप में मोड़ दिया गया है जिसकी  $AB$  और  $CD$  भुजाएँ समानान्तर हैं, और  $BC$  और  $DA$ ,  $AB$  में बराबर कोण बनाती हैं। यदि  $AB=18$  इंच,  $CD=12$  इंच और  $BC$  और  $DA$  प्रत्येक  $-5$  इंच हों, तो  $AB$  से तार के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

३। तीन बराबर बराबर सम दंड  $AB$ ,  $BC$  और  $CD$  इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि वे एक सम पदभुज की तीन क्रमागत भुजाएँ बनाने हैं और वे बिन्दु  $A$  से लटके हुये हैं; सिद्ध करो कि  $CD$  क्षैतिज है।

४।  $ABC$  एक सम तार का टुकड़ा है; उसके दोनों भाग  $AB$  और  $BC$  सीधे हैं और कोण  $ABC=135^\circ$ । यह तार एक नियत बिन्दु से  $B$  पर बंधे हुये तागे से लटका हुआ है और उसका  $AB$  भाग क्षैतिज रहता है। सिद्ध करो कि  $BC : AB :: \sqrt{2} : 1$ ।

५। एक दंड, जिसकी लम्बाई  $5a$  है, इस प्रकार मुड़ा हुआ है कि वह एक सम पदभुज की पाँच भुजाएँ बनाता है; सिद्ध करो कि उसके किसी मिरे से गुरुत्व-केन्द्र की दूरी  $\frac{a}{10} \sqrt{133}$  है।

६। एक सम समलम्बीय पटल  $ABCD$  की भुजा  $CD$ ,  $AB$  में जो उसके सम्मुख और समानान्तर है दुगुनी है।  $ABCD$  के गुरुत्व-केन्द्र की  $AB$  और  $CD$  में दूरियों की तुलना करो।

७। यदि चतुर्भुजीय पटल  $ABCD$  का गुरुत्व-केन्द्र उसके एक शीश  $AC$  पर हो, तो सिद्ध करो कि  $BD$  से  $A$  और  $C$  की दूरियाँ  $1:2$  की निष्पत्ति में हैं।





करो कि समतुलित अवस्था में उसका आधार और अक्ष ऊर्ध्वाधर से बराबर बराबर झुके होंगे ।

२२। एक ही घातु के दो सम शकु, जिनकी तिरछी ऊँचाइयाँ बराबर हैं और जिनके शीर्ष कोण क्रम से  $60^\circ$  और  $120^\circ$  हैं, इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनकी एक तिरछी भुजा एक दूसरे पर पड़ती है । सिद्ध करो कि यदि वे उभयनिष्ठ शीर्ष से लटकाने जायें, तो उनकी सर्वा ऊर्ध्वाधर से  $15^\circ$  का कोण बनायगी ।

२३। कागज के एक त्रिभुजाय टुकड़े का शीर्ष त्रिभुज को दो भुजाओं को समविभाजित करनेवाली रेखा पर मोड़ कर आधार पर रख दिया जाता है । सिद्ध करो कि इस अवस्था में त्रिभुज के आधार से कागज के जड़त्व-केन्द्र की दूरी उमी रेखा से बिना मोड़े हुये कागज के जड़त्व-केन्द्र की दूरी की तीन-चौथाई है ।

२४। एक कड़े कागज का आयताकार टुकड़ा, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई में  $\sqrt{2}:1$  की निष्पत्ति है, एक क्षतिज मेज पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसकी बड़ी भुजायें मेज के किनारे पर लम्ब हैं और उससे बाहर निकली हुई हैं । मेज पर रखे हुये उसके कोणों को इस प्रकार दोहरा कर दिया गया है कि कोरे कोनों को मिटानेवाली रेखा के मध्य-बिन्दु में होकर जाती हैं और उससे  $45^\circ$  का कोण बनाती हैं । अब कागज ठीक गिरने की अवस्था में हो जाता है ; सिद्ध करो कि मौलिक अवस्था में उसकी लम्बाई का  $\frac{25}{48}$  वाँ भाग मेज पर था ।

२५। एक  $n$  भुजाओं के सम बहुभुज के  $(n-1)$  शीर्षों में से प्रत्येक पर एक कण रखा हुआ है । सब कण बराबर हैं । सिद्ध करो कि बहुभुज के परिवृत्त के केन्द्र से उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी  $\frac{r}{n-1}$  है, जहाँ पर  $r$  वृत्त की त्रिज्या है ।

२६। एक वृत्तीय पटल में से एक वर्ग छेद काट दिया गया है । वर्ग

१४। उस शंकु का शीर्ष कोण मालूम करो जिसके आधार की सम्मिलित करके सम्पूर्ण पृष्ठ का गुरुत्व-केन्द्र उसके आयतन के गुरुत्व-केन्द्र पर हो।

१५। एक बेलन और एक शंकु के आधार, जो विस्तार में बराबर हैं, जुड़े हुये हैं; शंकु और बेलन की ऊँचाइयाँ में निष्पत्ति मालूम करो यदि दोनों के सम्मिलित पिंड का गुरुत्व-केन्द्र उनके उभयनिष्ठ आधार के केन्द्र पर है।

१६। बताओ एक सम बेलन में एक शंकु, जिसका और बेलन का आधार से एक ही है, किस प्रकार काटा जाय कि शेष पिंड का गुरुत्व-केन्द्र शंकु के शीर्ष पर हो।

१७। यदि किसी शंकु के आधार के व्यास और उसकी ऊँचाई में  $1 : \sqrt{2}$  की निष्पत्ति हो, तो सिद्ध करो कि यदि उसमें से बड़े से बड़ा गोला काट लिया जाय तो शेष पिंड का गुरुत्व-केन्द्र शंकु के गुरुत्व-केन्द्र पर पड़ेगा।

१८। एक सम शंकु में से जिसका शीर्ष कोण  $60^\circ$  है, बड़े से बड़ा गोला काट लिया गया है, सिद्ध करो कि शेष पिंड का गुरुत्व-केन्द्र अक्ष की  $11.49$  की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१९। एक ठोस सम-वृत्तीय शंकु के आधार को इस प्रकार खोखला किया गया है कि खोखला भाग उनी आधार पर मौलिक शंकु की आधी ऊँचाई का एक समवृत्तीय शंकु बन जाता है; शेष पिंड के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

२०। एक सम समत्रिबाहु त्रिभुज  $ABC$  इस प्रकार सजा हुआ है कि उसका शीर्ष  $A$  एक चिकनी दीवार पर  $BD$  दूरी में लटका हुआ है। दीवार की लम्बाई त्रिभुज की भुजा के बराबर है और वह  $A$  के ऊर्ध्वोपर ऊपर एक बिन्दु  $D$  पर बँधी हुई है। सिद्ध करो कि दीवार में  $B$  और  $C$  की दूरियाँ  $1:5$  की निष्पत्ति में हैं।

२१। एक शंकु, जिसकी ऊँचाई उसके आधार की त्रिगुणा की बार गुनी है, अपने आधार की परिधि के एक बिन्दु में लटका हुआ है; सिद्ध

करो कि समतुलित अवस्था में उसका आधार और अक्ष ऊर्ध्वाधर से बराबर धरावर झुके होंगे ।

२२। एक ही धातु के दो सम शंकु, जिनकी तिरछी ऊँचाइयाँ बराबर हैं और जिनके शीर्ष कोण क्रम से  $60^\circ$  और  $120^\circ$  हैं, इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनकी एक तिरछी भुजा एक दूसरे पर पड़ती हैं । सिद्ध करो कि यदि वे उभयनिष्ठ शीर्ष से लटकाये जायें, तो उनकी स्पर्शी ऊर्ध्वाधर से  $15^\circ$  का कोण बनायगी ।

२३। कागज के एक त्रिभुजीय टुकड़े का शीर्ष त्रिभुज की दो भुजाओं को समविभाजित करनेवाली रेखा पर मोड़ कर आधार पर रख दिया जाता है । सिद्ध करो कि इस अवस्था में त्रिभुज के आधार से कागज के जड़त्व-केन्द्र की दूरी उसी रेखा से बिना मोड़े हुये कागज के जड़त्व-केन्द्र की दूरी की तीन-चौथाई है ।

२४। एक कड़े कागज का आयताकार टुकड़ा, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई में  $\sqrt{2}:1$  की निष्पत्ति है, एक क्षैतिज मेज पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसकी बड़ी भुजायें मेज के किनारे पर लम्ब हैं और उससे बाहर निकली हुई हैं । मेज पर रखे हुये उसके कोनों को इस प्रकार दोहरा कर दिया गया है कि कोरे कोनों को मिलानेवाली रेखा के मध्य-बिन्दु में होकर जाती है और उससे  $45^\circ$  का कोण बनाती है । अब कागज ठीक गिरने की अवस्था में हो जाता है ; सिद्ध करो कि मौलिक अवस्था में उसकी लम्बाई का  $\frac{25}{48}$  वा भाग मेज पर था ।

२५। एक  $n$  भुजाओं के सम बहुभुज के  $(n-1)$  शीर्षों में से प्रत्येक पर एक कण रखा हुआ है । सब कण बराबर हैं । सिद्ध करो कि बहुभुज के परिवृत्त के केन्द्र में उनके गुह्यत्व-केन्द्र की दूरी  $\frac{r}{n-1}$  है, जहाँ पर  $r$  वृत्त की त्रिज्या है ।

२६। एक वृत्तीय पटल में से एक वर्ग छेद काट दिया गया है । वर्ग

१४। उम शंकु का शीर्ष कोण मालूम करो जिसके आधार को सम्मिलित करके सम्पूर्ण पृष्ठ का गुरुत्व-केन्द्र उनके आयतन के गुरुत्व-केन्द्र पर हो।

१५। एक बेलन और एक शंकु के आधार, जो विस्तार में बराबर हैं, जुड़े हुये हैं; शंकु और बेलन की ऊँचाइयों में निष्पत्ति मालूम करो यदि दोनों के सम्मिलित पिंड का गुरुत्व-केन्द्र उनके उभयनिष्ठ आधार के केन्द्र पर है।

१६। बताओ एक सम बेलन में एक शंकु, जिसका और बेलन का आधार से एक ही है, किस प्रकार काटा जाय कि शेष पिंड का गुरुत्व-केन्द्र शंकु के शीर्ष पर हो।

१७। यदि किसी शंकु के आधार के व्यास और उसकी ऊँचाई में  $1:\sqrt{2}$  की निष्पत्ति हो, तो सिद्ध करो कि यदि उसमें से बड़े से बड़ा गोला काट लिया जाय तो शेष पिंड का गुरुत्व-केन्द्र शंकु के गुरुत्व-केन्द्र पर पड़ेगा।

१८। एक सम शंकु में से जिसका शीर्ष कोण  $60^\circ$  है, बड़े से बड़ा गोला काट लिया गया है; सिद्ध करो कि शेष पिंड का गुरुत्व-केन्द्र अक्ष को  $11.49$  की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१९। एक ठोस सम-वृत्तीय शंकु के आधार को इस प्रकार खोलला किया गया है कि खोलला भाग उसी आधार पर मौलिक शंकु की बायी ऊँचाई का एक समवृत्तीय शंकु बन जाता है; शेष पिंड के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

२०। एक सम समत्रिबाहु त्रिभुज  $ABC$  इस प्रकार सवा हुआ है कि उसका शीर्ष  $A$  एक चिकनी दीवार पर  $BD$  डोरी से लटका हुआ है। डोरी की लम्बाई त्रिभुज की भुजा के बराबर है और वह  $A$  के ऊर्ध्वपर ऊपर एक बिन्दु  $D$  पर बँधी हुई है। सिद्ध करो कि दीवार से  $B$  और  $C$  की दूरियाँ  $1:5$  की निष्पत्ति में हैं।

२१। एक शंकु, जिसकी ऊँचाई उसके आधार की त्रिगुणा की बार गुनी है, अपने आधार की परिधि के एक बिन्दु से लटका हुआ है; सिद्ध

३०। यदि दो मात्राओं  $m$  और  $n$  के स्थान  $A$  और  $B$  और उनका गुरुत्व-केन्द्र  $G$  है, तो सिद्ध करो कि यदि  $P$  कोई बिन्दु है,

$$m.AP^2 + n.BP^2 = m.AG^2 + n.BG^2 + (m+n)PG^2.$$

इसी प्रकार यदि  $A, B, C, \dots$  बिन्दुओं पर मात्राएँ  $m, n, p, \dots$  हों, और  $G$  उनका गुरुत्व-केन्द्र हो, तो सिद्ध करो कि

$$m.AP^2 + n.BP^2 + p.CP^2 + \dots$$

$$= m.AG^2 + n.BG^2 + p.CG^2 + \dots + (m+n+p+\dots)PG^2.$$



का विकर्ण वृत्त की शिखा के बराबर है। सिद्ध करो कि शीप के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी वृत्त के केन्द्र से  $\frac{a}{8r-4}$  है, जहाँ पर  $a$  वृत्त का व्यास है।

२७। एक समविभुजीय बोर्ड में में अन्तःवृत्त के क्षेत्रफल का भाग काट दिया गया है, सिद्ध करो कि शीप के गुरुत्व-केन्द्र की  $a$  दूरी में भुजा  $\frac{S}{3a_s} \cdot \frac{2s^2 - 3\pi a_s^2}{s^2 - \pi s}$  है, जहाँ पर  $S$  बोर्ड का क्षेत्रफल और  $s$  उसकी अक्ष-परिमाण है।

२८। एक सम वृत्तीय प्लेट में में दिये हुये विस्तार का एक वृत्तीय छेद काट दिया गया है, सिद्ध करो कि शीप का गुरुत्व-केन्द्र किसी वृत्त के भीतर होगा।

२९। किसी चतुर्भुजीय फल के शीपों और उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु की दूरियों उनके धरातल की किसी रेखा से  $a, b, c, d$ , और  $e$  हैं; सिद्ध करो कि उस रेखा से जड़त्व-केन्द्र की दूरी  $\frac{1}{3}(a+b+c+d-e)$  होगी।

मान लो  $A, B, C, D$  शीप हैं, और  $E$  विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

तो 
$$\frac{\triangle ACD}{\triangle ACB} = \frac{D \text{ से } AC \text{ पर लम्ब}}{B \text{ से } AC \text{ पर लम्ब}} = \frac{DE}{EB} = \frac{d-e}{e-b}.$$

पारा १०४ और १११ से  $OX$  से  $\triangle ACD$  के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी  $\frac{a+c+d}{3}$  और  $\triangle ACB$  के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी  $\frac{a+b+c}{3}$  है।

अतः  $OX$  से दृष्ट गुरुत्व-केन्द्र की दूरी

$$\begin{aligned} &= \frac{\triangle ACD \times \frac{1}{3}(a+c+d) + \triangle ACB \times \frac{1}{3}(a+b+c)}{\triangle ACD + \triangle ACB} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(d-e)(a+c+d-b)(a+b+c)}{(d-e) + (e-b)} \\ &= \frac{1}{3}(a+b+c+d-e), \text{ मक्षिण करने पर।} \end{aligned}$$

३०। यदि दो मात्राओं  $m$  और  $n$  के स्थान  $A$  और  $B$  और उनका गुरुत्व-केन्द्र  $G$  है, तो सिद्ध करो कि यदि  $P$  कोई बिन्दु है,

$$m.AP^2 + n.BP^2 = m.AG^2 + n.BG^2 + (m+n)PG^2.$$

इसी प्रकार यदि  $A, B, C, \dots$  बिन्दुओं पर मात्राये  $m, n, p, \dots$  हों, और  $G$  उनका गुरुत्व-केन्द्र हो, तो सिद्ध करो कि

$$m.AP^2 + n.BP^2 + p.CP^2 + \dots \\ = m.AG^2 + n.BG^2 + p.CG^2 + \dots + (m+n+p+\dots)PG^2.$$

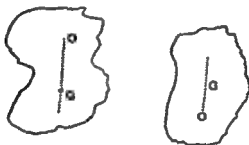
## अध्याय १०

### गुरुत्व-केन्द्र (क्रमशः)

#### (Centre of Gravity—Continued)

११९—यदि कोई दृढ़ पिंड समतुलित अवस्था में है जब कि उसका एक बिंदु नियत है, तो पिंड का गुरुत्व-केन्द्र नियत बिंदु से होकर जाती हुई ऊर्ध्वाधर रेखा में होगा।

मान लो  $O$  पिंड का नियत बिंदु है, और  $G$  उसका गुरुत्व-केन्द्र है।



पिंड पर कार्य करते हुये बल पिंड के नियत आलम्बन-बिंदु पर प्रतिबल और पिंड के अवयव भागों के भार हैं।

इन अवयव भागों के भार पिंड के गुरुत्व-केन्द्र से होकर जानेवाले एक मात्र ऊर्ध्वाधर बल के बराबर हैं।

जब दो बल किसी पिंड को समतुलित अवस्था में रखते हैं तो वे बराबर और विपरीत होते हैं और उनकी क्रिया-रेखा एक ही होती है। परन्तु क्रिया-रेखाएँ एक नहीं हो सकतीं जबतक कि  $G$  में होकर जानेवाली ऊर्ध्वाधर रेखा  $O$  से होकर न जाय।

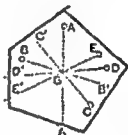
इसमें दो स्थितियाँ हो सकती हैं ; पहली, जब गुरुत्व-केन्द्र  $G$  नियत बिंदु  $O$  के ठीक नीचे हो, और दूसरी जब  $G, O$  के ठीक ऊपर हो।

पहली दशा में, यदि पिंड को समतुलित अवस्था में थोड़ा हटा दिया जाय तो पिंड में फिर अपनी समतुलित अवस्था में लौट आने की प्रवृत्ति होती है ; दूसरी दशा में पिंड में अपनी समतुलित अवस्था में लौट आने की प्रवृत्ति नहीं होती ।

• १२०—किसी भी रूप के पिंड का गुरुत्व-केन्द्र प्रयोग द्वारा मान्य करना ।

किसी रूप के कांडंबोर्ड का एक चीरम टुकड़ा लो। उसमें कुछ इतने छोटे छोटे छेद  $A, B, C, D$ , करो जिनमें होकर एक छोटी पिन घेरांक जा सके ।

कांडंबोर्ड को  $A$  छेद में लटकाओ और उसे स्वतंत्रतापूर्वक लटकने दो जबतक कि वह समतुलित अवस्था में न आ जाय। कांडंबोर्ड पर रेखा  $AA'$  गाँव दो जो ऊर्ध्वाधर हो। यह पिन में एक लागा, जिसके दूसरे सिरे पर नीचे की एक छोटी गुनिया बाँधी हो लटका कर दिया जा सकता है जब पहले नागे में गुँथ लड़िया (पाक) मल दी गई हो। यदि अब नागे को कांडंबोर्ड पर टोका जाय तो उस पर लड़िये की एक रेखा मल जायगी जो  $AA'$  है। अब कांडंबोर्ड को छेद  $B$  पर पिन लगा कर लटकाओ, और इसी प्रकार रेखा  $BB'$  गाँवो। यह भी ऊर्ध्वाधर होगी।



इस प्रयोग को बिन्दु  $C, D, E$  लेकर करो जिनमें होकर पिन बा मके और इस प्रकार ऊर्ध्वाधर रेखाएँ  $CC', DD', EE'$  मान्य करो।

यह लड़िया में गाँबी गई मल रेखाएँ  $AA', BB', CC', DD', EE'$  एक ही बिन्दु  $G$  में होकर जायेंगी। यदि कांडंबोर्ड को मोटाई की मोड़ दो तो फिर बिन्दु  $G$  ही उसका गुरुत्व-केन्द्र होगा। यदि अब पिन को  $G$  में होकर रखें तो मान्य होगा कि कांडंबोर्ड किसी भी अवस्था में रखने पर समतुलित रहेगा।

१२१--यदि केंद्र पिंड अपने आधार पर जो एक क्षैतिज धरातल को स्पर्श करता है गिरा जाय, तो वह गिरा रहेगा यदि उसके गुरुत्व-केन्द्र से होकर खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा धरातल को आधार के भीतर मिले और गिर जायेगी यदि वह बाहर मिले।

पिंड पर कार्य करने वाले बल उसका भार है जो उसके गुरुत्व-केन्द्र  $G$  पर कार्य करता है, और धरातल के प्रतिबल है जो पिंड के



आधार के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर कार्य करते हैं। यह सब प्रतिबल ऊर्ध्वाधर है इसलिये यह आधार के किसी बिन्दु पर कार्य करने वाले एक-मात्र ऊर्ध्वाधर बल से संयोजित किया जा सकते हैं।

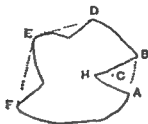
क्योंकि दो सम समानान्तर बलों का परिणामीबल बलों के बीच के किसी बिन्दु पर कार्य करता है अतएव पिंड के आधार पर सब प्रतिबलों का परिणामीबल आधार के बाहर किसी बिन्दु पर कार्य नहीं कर सकता है।

अतः यदि पिंड के गुरुत्व-केन्द्र से होकर खींची हुई ऊर्ध्वाधर रेखा धरातल के आधार के बाहर किसी बिन्दु पर मिले, तो वह परिणामी-प्रतिबल से समतुलित नहीं हो सकती और पिंड समतुलित अवस्था में नहीं रह सकता अतः वह गिर जायगा।

यदि पिंड का आधार एक ऐसा चित्र है जिसका एक कोण अन्तःप्रक्षिप्त है, जैसा कि नीचे के चित्र में दिखाया गया है, तो हमें प्रतिज्ञा के शब्द "आधार" के अर्थ को बढ़ा कर उस क्षेत्रफल का लेना चाहिये जो ज्यामितीय आधार के चारों ओर एक तांगे को खींच कर बांधने से

आता है। ऊपर के चित्र में "आधार" में तात्पर्य क्षेत्रफल  $ABDEF A$  में है।

जैसे, बिन्दु  $C$ , जिसपर परिणामी-प्रतिबल कार्य करता है, क्षेत्र  $AHB$  के

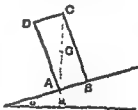


भीतर हो सकता है, परन्तु वह बिन्दुमय रेखा  $AB$  के बाहर नहीं हो सकता।

यदि बिन्दु  $C$  रेखा  $AB$  पर  $A$  और  $B$  के बीच में हो, तो पिंड गिरने की सीमा पर होगा।

उदाहरण। एक बेलन, जिसकी ऊँचाई  $h$  है और जिसके आधार की त्रिज्या  $r$  है, एक आनत तल पर रखा हुआ है और सरकने से रूका हुआ है; यदि धरातल का झुकाव धीरे धीरे बढ़ाया जाय तो बताओ बेलन कब गिर पड़ेगा।

मान लो कि चगल का चित्र बेलन के परिच्छेद को उम समय प्रदर्शित करता है जब वह गिरने की सीमा पर है, इसलिये पिंड के गुरुत्व-केन्द्र  $G$  में होकर खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा ठीक आधार के सिरे  $A$  में होकर जायगी। अतः कोण  $CAD$  धरातल के झुकाव  $\alpha$  के बराबर होगा।



$$\text{अतः } \frac{h}{2r} = \frac{CB}{AB} = \text{सिज्या } CAB = \text{कोसज्या } \alpha ;$$

$$\therefore \text{सिज्या } \alpha = \frac{2r}{h},$$

जिसमें धरातल का इष्ट झुकाव मालूम हो जाता है।

### स्थायी, अस्थायी, तथा उदासीन संस्थिति

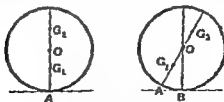
१२२—धारा ११९ में हम बता चुके हैं कि धारा के पहले चित्र में यदि पिंड तनिक सा हटा दिया जाय तो वह फिर समतुलित स्थिति में लौट आयगा, परन्तु दूसरे चित्र में पिंड फिर मौलिक स्थिति में नहीं लौटेगा परन्तु उस स्थिति से और अधिक दूर हो जायगा।

ये दो पिंड क्रम से स्थायी और अस्थायी संस्थिति में कहे जाते हैं।

अब यदि एक गंजु, जिसका चौरस वृत्तीय आधार किसी क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है, थोड़ा सा हटा दिया जाय तो वह अपनी समतुलित स्थिति में फिर लौट आयगा; परन्तु यदि वह धरातल पर अपने शीर्ष के बल रखा हुआ हो और उसे तनिक सा हटा दिया जाय तो वह अपनी समतुलित स्थिति से और भी अधिक दूर हो जायगा; परन्तु यदि वह अपनी तिरछी भुजा को धरातल पर स्पर्श करते हुये रखा हुआ हो तो वह हर एक स्थिति में समतुलित रहेगा। इस अन्तिम अवस्था में वह उदासीन संस्थिति में कहा जाता है।

१२३—अब एक भारी गोले पर विचार करो जो एक क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसके केन्द्र पर नहीं है।

मान लो पहला चित्र गोले की उस स्थिति को प्रदर्शित करता है जिसमें गुरुत्व-केन्द्र या तो केन्द्र  $O$  के नीचे है, जैसे  $G_1$  या ऊपर है,



जैसे  $G_2$ । मान लो दूसरा चित्र गोले की उस स्थिति को प्रदर्शित करता है जब वह एक छोटे से कोण पर घुमा दिया जाता है और तब  $B$  उसका धरातल से स्पर्श-बिन्दु हो जाता है।

धरातल का प्रतिबल अब भी गोले के केन्द्र से होकर कार्य करता है ।

यदि पिंड का भार  $G_1$  से कार्य करे तो स्पष्ट है कि पिंड अपनी समतुल्य की स्थिति में आ जायगा और इसलिये पिंड आरम्भ में स्थायी संस्थिति में था ।

यदि भार  $G_2$  में कार्य करे तो पिंड समतुल्य की अपनी मौलिक स्थिति से और भी अधिक दूर हट जायगा और इसलिये वह आरम्भ में अस्थायी संस्थिति में था ।

परन्तु यदि पिंड का गुरुत्व-केन्द्र  $O$  पर है तो दूसरे चित्र की स्थिति में उसका भार धरातल के प्रतिबल में फिर भी समतुल्य होगा, इसलिये पिंड नई स्थिति में ही रहेगा और स्थिति उदासीन संस्थिति कहलायगी ।

१२४—परिभाषा । एक पिंड स्थायी संस्थिति में तब कहलाता है कि, यदि उसे तनिक सा समतुल्य स्थिति से हटा दिया जाय, तो उस जब पर कार्य करते हुये बल उसे फिर समतुल्य स्थिति में लौटा लायें ; और वह अस्थायी संस्थिति में तब कहलाता है जबकि, यदि उसे तनिक सा हटा दिया जाय तो उस पर कार्य करते हुये बल उसे समतुल्य स्थिति से और भी अधिक हटा दें ; वह उदासीन संस्थिति में कहलाता है यदि हटी हुई स्थिति में उस पर कार्य करते हुये बल समतुल्य हों ।

प्रायः वे पिंड जिनके शीर्ष भारी होते हैं, अथवा जिनके आधार छोटे होते हैं, अस्थायी होते हैं ।

इस प्रकार मॅटान्तिक रूप में एक पिन क्षैतिज मेज पर अपनी नोक पर इस प्रकार सीधी खड़ी की जा सकती है कि वह समतुल्य अवस्था में रहे, परन्तु व्यावहारिक रूप से उसका आधार इतना छोटा होगा कि थोड़ा सा हटाने से ही उसके गुरुत्व-केन्द्र में खींचा हुआ ऊर्ध्वाधर उसके आधार के बाहर हो जायगा और वह गिर जायगी । यही बात बिलियर्ड के उस डंडे के लिये भी सही है जो मेज पर अपने सिरे के ऊपर ऊर्ध्वाधर अवस्था में खड़ा किया जाता है ।

माधारण रूप से एक पिंड स्थायी संस्थिति में होता है जब उसका



गुरुत्व-केन्द्र उस सबसे नीचे स्थान में हो जो वह ले सकता है ; इसके उदाहरण पिछली धारा में दिये गये हैं, और एक उदाहरण घड़ी का पेन्डुलम भी है, जो हिलाने पर फिर समतुलित अवस्था में लौट आता है ।

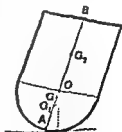
अब उस आदमी पर विचार करो जो एक तनी हुई रस्सी पर चलता है। वह एक डंडा लिये रहता है जो एक सिरे पर भारी होता है, ताकि उसका और डंडे का गुरुत्व-केन्द्र उसके पैरों के नीचे रहे। जब उसे ऐसा मालूम होता है कि वह एक ओर गिर रहा है तो वह डंडे का स्थान इस प्रकार बदल देता है कि गुरुत्व-केन्द्र उसके पैरों के दूसरी ओर आ जाय, और तब परिणामी भार उसे फिर सीधी अवस्था में खींच लेता है ।

यदि किसी पिंड की एक से अधिक सैद्धान्तिक समतुलित स्थितियाँ हो, तो ध्यापक रूप से वह स्थिति जिसमें उसका गुरुत्व-केन्द्र सबसे नीचा होता है स्थायी मस्थिति होगी और वह स्थिति जिसमें गुरुत्व-केन्द्र सबसे ऊँचा होता है अस्थायी मस्थिति होगी ।

१२५—उदाहरण । एक बेलन और उसके आधार पर जुड़े हुये अर्द्ध-गोले से बना हुआ एक समाश्रित पिंड एक क्षैतिज मेज पर अपने अर्द्ध-गोलीय हिस्से पर रखा हुआ है, तो बनाओ संस्थिति स्थायी है अथवा अस्थायी ?

मान लो कि  $G_1$  और  $G_2$  अर्द्ध-गोले और बेलन के गुरुत्व-केन्द्र हैं,  $A$  पिंड का वह बिन्दु है जहाँ पर वह मेज को स्पर्श करता है, और  $O$  अर्द्ध-गोले के आधार का केन्द्र है ।

मान लो  $h$  बेलन की ऊँचाई है और  $r$  आधार की त्रिज्या है, तो



$$OG_1 = \frac{3}{8} r, \text{ और } OG_2 = \frac{h}{2} \text{ (भाग ११०).}$$

अर्द्ध-गोले और बेलन के भार क्रमसे  $\frac{2}{3}\pi r^3$  और  $\pi r^2 h$  की निष्पत्ति में हैं।

हटी हुई स्थिति में धरातल का प्रतिबल हमेशा केन्द्र  $O$  से जायगा।

अतः संस्थिति स्थायी अथवा अस्थायी होगी यदि मिश्रित पिंड का गुरुत्व-केन्द्र  $G$ ,  $O$  के नीचे अथवा ऊपर हो,

अर्थात् यदि  $OG_1 \times \text{अर्द्ध गोले का भार} > OG_2 \times \text{बेलन का भार}$ ,

अर्थात्, यदि  $\frac{2}{3}r \times \frac{2}{3}\pi r^3 > \frac{h}{2} \times \pi r^2 h$ ,

अर्थात्, यदि  $\frac{r^2}{2} > \frac{h^2}{2}$ ,

अर्थात्, यदि  $r > \sqrt{2} \cdot h$ ,

अर्थात्  $r > h \times 1.42 \dots$

१२६\*—इस पुस्तक में हम एक पिंड की दूसरे पिंड के ऊपर संस्थिति की व्यापक व्याख्या पर विचार नहीं कर सकते हैं। अगली धारा में हम उस स्थिति पर विचार करेंगे जब दोनों पिंडों के स्पर्श करते हुये भाग गोलीय हों।

एक पिंड एक दूसरे नियत पिंड पर समतुलित अवस्था में रखा हुआ है। दोनों पिंडों के स्पर्श करते हुये भाग गोलीय है जिनकी त्रिज्याये क्रमसे  $R$  और  $R$  है; यदि पहले पिंड की थोड़ा सा हटा दिया जाय तो बनाओ संस्थिति स्थायी है अथवा अस्थायी, जब पिंड क्षतिग्रस्त है कि फिसल नहीं पाते।

मान लो नीचे के पिंड के गोलीय धरातल का केन्द्र  $O$  है और ऊपर के पिंड का  $O_1$  है; क्योंकि पिंड समतुलित अवस्था में हैं इसलिये ऊपर



$$\text{परन्तु } \frac{\text{ज्या } \theta}{\text{ज्या } (\theta + \phi)} = \frac{\theta}{\theta + \phi},$$

क्योंकि  $\theta$  और  $\phi$  दोनों बहुत छोटे हैं,

$$= \frac{r}{r+R}, \text{ समीकरण (१) में}$$

अतः संस्थिति स्थायी अथवा अस्थायी है, यदि

$$\frac{r-h}{r} > \text{अथवा} < \frac{r}{r+R},$$

अर्थात्, यदि  $r - \frac{r^2}{r+R} > \text{अथवा} < h,$

अर्थात्, यदि  $\frac{Rr}{r+R} > \text{अथवा} < h,$

अर्थात्, यदि  $\frac{1}{h} > \text{अथवा} < \frac{1}{r} + \frac{1}{R}.$

अतः, यदि  $\frac{1}{h} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$ , तो संस्थिति कभी कभी उदामीन कही जाती है। यह वास्तव में अस्थायी है, परन्तु इसका अन्वेषण इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

अतः संस्थिति केवल उमी दशा में स्थायी है जबकि

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{r} + \frac{1}{R},$$

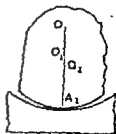
अन्यथा वह अस्थायी होगी।

उपसाध्य १। यदि नीचे के पिंड का पृष्ठ उन्नतोदर होने की जगह, जैसा कि पिछले पृष्ठ के चित्र में है, नतोदर हो जैसा कि अगले चित्र में है, तो भी यदि हम  $R$  का चिन्ह बदल दें ऊपर का अन्वेषण ठीक रहेगा।

अतः संस्थिति स्थायी है जब

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{r} - \frac{1}{R};$$

अन्यथा वह अस्थायी है।

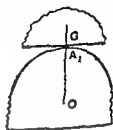


उपसाध्य २ । यदि ऊपर के पिंड का एक समतल फलक हो और वह नीचे के पिंड को स्पर्श करे, जैसा कि अगले चित्र में है, तो  $r$  का मूल्य अनन्त होगा और इसलिये  $\frac{1}{r}$  शून्य होगा ।

अतः संस्थिति स्थायी होगी यदि

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{R} \text{ अर्थात् } h < R.$$

अतः संस्थिति स्थायी होगी यदि ऊपर के पिंड के गुरुत्व-केन्द्र की उसके समतल फलक से दूरी नीचे के पिंड की त्रिज्या से कम हो, अन्यथा संस्थिति अस्थायी होगी ।



उपसाध्य ३ । यदि नीचे का पिंड एक घ्रातल हो, तो  $R$  अनन्त हो और संस्थिति स्थायी रहेगी यदि

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{r}, \text{ अर्थात् यदि } h < r.$$

अतः यदि गोलीय आधार का कोई पिंड एक क्षैतिज मेज पर रखा हो, तो वह स्थायी संस्थिति में होगा यदि स्पर्श-बिन्दु से उसके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी गोलीय पृष्ठ की त्रिज्या से कम हो ।

### उदाहरणमाला २०

१ । चढ़ई का एक पैमाना, जो २ फुट लम्बा है, दो भागों में जो एक दूसरे पर लम्ब है, मुड़ा हुआ है ; छोटे भाग की लम्बाई ८ इंच है । यदि छोटा भाग एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रख दिया जाय, तो बताओ कि मेज पर सबसे छोटे भाग की क्या लम्बाई होगी कि वह समतुलित अवस्था में रह सके ?

२ । धातु के एक टुकड़े से बना हुआ एक बेलन, जिसका आयतन १८ घन इंच है, अपने आधार पर एक आनत तल पर, जिसका झुकाव  $30^\circ$  है, रखा हुआ है, और फिसलने में रुका हुआ है । बेलन कितना लम्बा बनाया जाय कि वह ठीक गिर न सके ?

३। यदि एक त्रिभुजीय पटल  $ABC$  एक ऊर्ध्वाधर धरातल में ठीक इस प्रकार रखा जा सके कि उसका  $AB$  किनारा एक चिकनी मेज से स्पर्श करता हो, तो सिद्ध करो कि  $BC^2 - AC^2 = 3AB^2$ .

४। एक सम वर्ग प्लेट  $ABCD$ , जिसका भार  $W$  है, की भुजा  $CD$ ,  $E$  पर समविभाजित है और त्रिभुज  $AED$  काट दिया गया है। प्लेट  $ABCEA$  ऊर्ध्वाधर अवस्था में इस प्रकार रखी हुई है कि उसकी भुजा  $CD$  एक क्षैतिज धरातल पर रहती है। बताओ  $A$  पर बड़ा से बड़ा कोन मा भार रखा जाय कि प्लेट न उल्टे ?

५।  $ABC$  एक चौरस बोर्ड है,  $A$  समकोण है और  $AC$  एक चौरस मेज से स्पर्श करता है ;  $D$ ,  $AC$  का मध्य-बिन्दु है और त्रिभुज  $ABD$  काट दिया गया है ; सिद्ध करो कि त्रिभुज ठीक गिरने की मीमा पर है।

६। एक ईंट इस प्रकार रखी हुई है कि उसकी लम्बाई का एक-चौथाई भाग दीवार के किनारे से बाहर निकला हुआ है ; एक ईंट और एक और ईंट का चौथाई भाग पहली ईंट पर इस प्रकार रखा हुआ है कि एक ईंट का चौथाई भाग पहली ईंट के किनारे से बाहर निकला रहता है ; एक ईंट और एक ईंट का आधा इस पर रखा हुआ है ; इत्यादि, सिद्ध करो कि इस प्रकार ईंटों के चार रद्दे बिना मसाले की सहायता के समतुलित अवस्था में रहेंगे, परन्तु यदि पाँचवाँ रद्दा रखा जाय तो ढाँचा गिर जायगा।

७। एक ही विस्तार और व्यास की  $\frac{1}{8}$  वीं मोटाई के कितने सिक्के एक अनन्त तल पर, जिसकी ऊँचाई आधार के एक छठवें भाग के बराबर है, बिना फिसले एक बेलनाकार ढेर में रखे जा सकते हैं ?

यदि प्रत्येक सिक्के का किनारा अपने नीचे के सिक्के के एक ओर बाहर निकला रहे, तो बताओ व्यास का कौनसा भाग प्रत्येक के बाहर निकला रहे कि अनन्त ऊँचाई का एक ढेर समतल पर खड़ा किया जा सके।

८। कुछ ईंटें, जिनमें से प्रत्येक 9 इंच लम्बी, 4 इंच चौड़ी और 3 इंच मोटी है एक दूसरे के ऊपर इस प्रकार रखी हुई है कि उनके सबसे संकीर्ण पृष्ठ अथवा मोटाईयाँ एक ही ऊर्ध्वाधर धरातल में रहती हैं, प्रत्येक ईंट अपने नीचे की

इंट में आधी इंच बाहर को निकली रहनी है ; सबमे नीचे की इंट मेंज पर रखी हुई है, बनाओ इस प्रकार बिना गिरे हुये कितनी इंटें रगी जा सकती है ?

९।  $ABC$  एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसका भार  $11'$  है, और जिसका कोण  $A=120^\circ$  और जिसकी भुजा  $AB$  एक चिकनी क्षैतिज मेंज पर रखी हुई है, तथा त्रिभुज का घरातल ऊर्ध्वाधर है। यदि  $C$  पर एक भार  $\frac{11'}{3}$  लटका दिया जाय, तो सिद्ध करो कि त्रिभुज ठीक गिरने की सीमा पर होगा।

१०। एक चतुर्भुज पटल  $ABCD$  दो सम समद्विबाहु त्रिभुज  $ABC$   $ADC$  से बना हुआ है, जिनके शीर्ष  $B$  और  $D$  उभयनिष्ठ आधार  $AC$  के विपरीत ओर हैं, तथा कोण  $ABC$  एक समकोण है। सिद्ध करो कि वह एक ऊर्ध्वाधर धरातल में समतुलित अवस्था में रहेगा यदि  $BC$  एक क्षैतिज धरातल पर हो और  $ADC$  का क्षेत्रफल,  $ABC$  के क्षेत्रफल के चौगुने में अधिक न हो।

११। एक पिंड एक ही आधार पर एक शंकु और एक अर्द्ध गोले में बना हुआ एक रुद्ध क्षैतिज मेंज पर रखा हुआ है। अर्द्ध गोला मेंज को स्पर्श करता है। शंकु की अधिक में अधिक ऊँचाई बताओ कि संस्थिति स्थायी हो।

१२। एक पिंड एक बेलन और एक अर्द्धगोले में बना हुआ है जिनके आधार बराबर हैं और एक दूसरे से जुड़े हुये हैं। बेलन की ऊँचाई को उसकी त्रिज्या से निष्पत्ति मालूम करो जबकि संस्थिति उदासीन हो। अर्द्ध-गोलीय पृष्ठ क्षैतिज मेंज पर रखा हुआ है।

१३। एक अर्द्ध-गोला बराबर त्रिज्या के एक अन्य गोले पर समतुलित स्थिति में रखा हुआ है, सिद्ध करो कि संस्थिति अस्थायी होगी यदि अर्द्ध-गोले की वक्र पृष्ठ गोले पर रखा हो और स्थायी होगी यदि उसकी चौरस पृष्ठ रखा हो।

१४। एक भारी सम शंकु अपने आधार पर एक नियत रुद्ध गोले पर जिसकी त्रिज्या दी हुई है रखा हुआ है ; शंकु की अधिक से अधिक ऊँचाई मालूम करो जबकि वह स्थायी संस्थिति में हो। -

१५। एक सम छड़, जिसकी मोटाई  $2b$  है, एक पूर्ण रूक्ष क्षैतिज बेलन पर जिसकी त्रिज्या  $a$  है, सममिति रूप से रखी हुई है ; सिद्ध करो कि छड़ की संस्थिति स्थायी अथवा अस्थायी होगी जब  $b, a$  से छोटा अथवा बड़ा है ।

१६। एक भारी सम घन एक गोले के, जिसकी त्रिज्या  $r$  है, सबसे ऊँचे बिन्दु पर समतुलित स्थिति में रखा हुआ है । यदि गोला इतना रूक्ष हो कि घन फिसल न पावे, और यदि घन की भुजा  $\frac{3r}{2}$  हो, तो सिद्ध करो कि घन बिना गिरे हुये ही एक समकोण झूल सकता है ।

१७। समद्विबाहु त्रिभुज के रूप का एक पटल, जिसका क्षीर्ण कोण  $\alpha$  है, एक गोले पर जिसकी त्रिज्या  $r$  है, इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका घरातल ऊर्ध्वाधर है और उसकी बराबर भुजाओं में से एक गोले को स्पर्श करती है ; सिद्ध करो कि यदि त्रिभुज अपने ही घरातल में थोड़ा सा हटा दिया जाय, तो संस्थिति स्थायी होगी यदि ज्या  $\alpha, \frac{3r}{a}$  में कम है, जहाँ  $a$  त्रिभुज की बराबर भुजाओं में से एक है ।

१८। एक भार  $W$  एक चिकने आनत तल पर एक दिये हुये भार  $P$  से रखा हुआ है ; भार  $P, W$  में एक डोरी द्वारा, जो एक नियत घिरनी जिसका स्थान दिया हुआ है के ऊपर से जाती है, बंधा हुआ है । घरातल पर  $W$  का स्थान मालूम करो, और बताओ कि संस्थिति स्थायी है अथवा अस्थायी ।

१९। एक रूक्ष सम वृत्तीय मंडल, जिसकी त्रिज्या  $r$  है और भार  $p$  है, केन्द्र में  $c$  दूरी पर, एक बिन्दु के चारों ओर घूम सकता है । एक डोरी जो इतनी रूक्ष है कि फिसल नहीं पाती, उसकी परिधि के ऊपर लटकी हुई है और उसके सिरों पर दो विपक्ष भार  $W$  और  $w$  बंधे हुये हैं । समतुलन की स्थिति मालूम करो और बताओ कि संस्थिति स्थायी है अथवा अस्थायी ।



२०। एक ठोस गोला एक नियत रुक्ष-गोलीय प्याले के भीतर रखा हुआ है। प्याले की त्रिज्या गोले की त्रिज्या की दुगुनी है। सिद्ध करो कि गोले के सबसे ऊँचे बिन्दु पर कितना ही बड़ा भार क्यों न लगा दिया जाय, संस्थिति स्थायी रहेगी।

२१। एक पतला अर्द्ध-गोलीय प्याला, जिसकी त्रिज्या  $b$  और भार  $W$  है, एक नियत गोले, जिसकी त्रिज्या  $a$  है, के सबसे ऊँचे बिन्दु पर समतुलित स्थिति में रक्खा हुआ है; गोला इतना रुक्ष है कि फिसलने से रका हुआ है। प्याले के भीतर  $w$  भार का एक दूसरा छोटा सा चिकना गोला रखा हुआ है। सिद्ध करो कि संस्थिति तब तक स्थायी नहीं हो सकती जब तक

$$w < W \cdot \frac{a-b}{2b}.$$

## अध्याय ११

### कर्म

(Work)

१२७—कर्म । परिभाषा । बल कर्म करता हुआ कहा जाता है यदि उसका प्रयोग-बिन्दु अपने स्थान से बल की दिशा में हटे ।

गाड़ी के खींचने में घोड़े द्वारा लगाया गया बल कर्म करता है ।

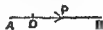
भार उठाने में आदमी द्वारा लगाया गया बल कर्म करता है ।

इंजन के पिस्टन के चलाने में वाष्प द्वारा लगाया गया दबाव कर्म करता है ।

जब कोई आदमी घड़ी में चाबी लगाता है तो वह कर्म करता है ।

किसी बल द्वारा किये गये कर्म का नाप बल और उस दूरी का गुणनफल होता है जो उसका प्रयोग-बिन्दु बल की दिशा में हट जाता है ।

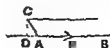
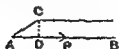
मान लो एक बल किसी पिंड के बिन्दु  $A$  पर कार्य करके बिन्दु  $A$  को  $D$  तक हटा देता है, तो  $P$  से किया गया कर्म  $P$  और  $AD$  के गुणनफल से नापा जाता है ।



यदि बिन्दु  $D$ ,  $A$  के उस ओर हो जिस ओर बल कार्य करता है तो यह कर्म धन होता है ; यदि  $D$  विपरीत ओर हो तो कर्म ऋण होता है ।

मान लो बल का प्रयोग-बिन्दु एक ऐसे बिन्दु  $C$  पर हट जाता है जो  $AB$  रेखा पर नहीं है ।  $AB$  अथवा आवश्यकतानुसार बढ़ाई हुई  $AB$  पर

$CD$  लम्ब खींची, तो  $AD$  वह दूरी है जो प्रयोग-बिन्दु बल की दिशा में हटा जाता है। अतः पहले चित्र में कर्म  $P \times AD$  है; दूसरे चित्र में कर्म  $-P \times AD$



है। जब बल में किया गया कर्म शून्य होता है तो इसे यों कहते हैं कि बल ने अपने विपरीत कर्म किया है।

उस स्थिति में जब  $AC$ ,  $AB$  पर लम्ब हो, तो बिन्दु  $A$  और  $D$  एक हो जाते हैं और बल  $P$  से किया गया कर्म शून्य हो जाता है।

उदाहरणार्थ, यदि किसी पिंड को क्षैतिज मेज पर हटाया जाय तो उसके भार द्वारा किया गया कर्म शून्य होता है। इसी प्रकार यदि किसी पिंड को आनत तल पर हटाया जाय तो घ्रातल का अभिलम्ब प्रतिबल कोई कर्म नहीं करता।

१२८—स्थिति विज्ञान में प्रयुक्त कर्म की इकाई को एक फुट-पौंड कहते हैं, और यह वह कर्म है जिसे एक पौंड भार का बल अपने प्रयोग-बिन्दु को अपनी दिशा में एक फुट हटा कर करता है। फुट-पौंड से अधिक अच्छा, यद्यपि भद्दा शब्द फुट-पौंड-भार होगा।

इस प्रकार 10 पौ० के पिंड का भार पिंड के 4 फुट गिरने में  $10 \times 4$  फुट-पौंड कर्म करता है।

यदि पिंड 10 फुट ऊर्ध्वाधर उठाया जाय तो उसका भार  $-10 \times 4$  फुट-पौंड कर्म करेगा।

१२९—यह देखा जा चुका है कि धारा १२७ में दी गई कर्म की परिभाषा में गति का होना अनिवार्य है। एक आदमी किसी पिंड के हटाने के प्रयत्न में अत्यधिक परिश्रम क्यों न करे परन्तु फिर भी यह सम्भव है कि वह पिंड पर कोई कर्म न कर सके।

जैसे, मान लो एक आदमी माल ढोने की भारी लट्टी हुई गाड़ी के घुसाव को सोचना है जिसे वह हटा नहीं पाता है। वह उसे हटाने में

अनी पूरी शक्ति का प्रयोग क्यों न करे, परन्तु चूँकि जो बल वह प्रयोग करता है, गाड़ी के प्रयोग-विन्दु को हटा नहीं पाता है, अतः दम्ब के पारिभाषिक अर्थ में वह कोई कर्म नहीं करता।

१३०—साध्य। सिद्ध करना कि कणों का एक स्थान से दूसरे स्थान के हटाने में  $W'h$  कर्म होता है, जहाँ पर  $W'$  कणों के भारों का योग और  $h$  वह दूरी है जिससे होकर कणों का गुरुत्व-केन्द्र उठाया गया है।

मान लो  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  कणों के भार हैं, और आरम्भ में संतुलित धरातल में उनकी ऊँचाइयाँ  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  हैं, और  $k$  उनके गुरुत्व-केन्द्र की ऊँचाई है, इसलिये, जैसा कि धारा १११ में,

$$k = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \quad \dots \quad (१).$$

मान लो कि अन्त में  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  कणों की ऊँचाइयाँ हैं, और  $k'$  नये गुरुत्व-केन्द्र की ऊँचाई है, इसलिये

$$k' = \frac{w_1x'_1 + w_2x'_2 + \dots + w_nx'_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \quad \dots \quad (२).$$

परन्तु चूँकि  $w_1 + w_2 + \dots = W'$ , समीकरण (१) और (२) से

$$w_1x_1 + w_2x_2 + \dots = W' \cdot k,$$

और 
$$w_1x'_1 + w_2x'_2 + \dots = W' \cdot k'.$$

$$\text{घटाने पर } w_1(x'_1 - x_1) + w_2(x'_2 - x_2) + \dots = W'(k' - k).$$

परन्तु इस समीकरण का बायाँ पक्ष भिन्न भिन्न कणों को उनके प्रारम्भिक स्थान से अन्तिम स्थान तक उठाने में कृत-कर्मों का योग है ; और दायाँ पक्ष  $= W' \times$  वह ऊँचाई जिससे गुरुत्व-केन्द्र उठाया गया है  $= W' \cdot h.$

अतः साध्य सिद्ध हो गया।

१३१—सामर्थ्य। परिभाषा। कर्म के उस परिमाण को जो समय की दृष्टि में कोई समान रूप से कार्य करता हुआ करे, कर्ता की सामर्थ्य कहते हैं।

इंजीनियर सामर्थ्य की जिस इकाई का प्रयोग करते हैं वह अश्व-सामर्थ्य है। कोई कर्मी एक अश्व-सामर्थ्य से कर्म करता हुआ कहा जाता है जब वह एक मिनट में 33,000 फुट-पाँड कर्म करता है अर्थात् जब वह 33,000 पाँ० भार को एक मिनट में एक फुट उठाता है, अर्थात् जब वह 330 पाँ० भार को एक मिनट में 100 फुट अथवा 33 पाँ० भार को एक मिनट में 1000 फुट उठाता है।

एक घोड़े (अश्व) के सामर्थ्य का यह परिमाण वाट ने निकाला था, परन्तु यह साधारण घोड़े की शक्ति के बाहर है। शब्द अश्व-सामर्थ्य प्रायः संक्षेप में अ० सा० (H. P.) लिखा जाता है।

१३२—यह स्मरण रहे कि धारा १३० का परिणाम किसी भी दशा में कर्मी की प्रारम्भिक अथवा अन्तिम सापेक्ष स्थिति पर निर्भर नहीं होता। यह केवल उनके गुरुत्व-केन्द्र की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति पर ही निर्भर रहता है।

उदाहरणार्थ, मान लो पृथ्वी में एक गड्ढा खोदा जाय, मिट्टी उड़ाई जाय, और पृथ्वी के तल पर गड्ढे के सिस्तर पर फैला दी जाय। हमें केवल मिट्टी के गुरुत्व-केन्द्र की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति की ही आवश्यकता है, और तब कर्म ज्ञात हो जायगा। यह कर्म उस मार्ग के बिल्कुल स्वतन्त्र है जिससे मिट्टी अपनी प्रारम्भिक स्थिति से अन्तिम स्थिति में ले जाई गई है।

उदाहरण। एक कुआँ, जिसका परिच्छेद एक वर्ग है जिसकी भुजा 4 फुट है, 300 फुट गहरा है और पानी से भरा हुआ है; पानी को ऊपर से उसके सिस्तर के तल तक पम्प करने में जो कर्म किया जायगा, उसे फुट-पाँड में मालूम करो।

उस इंजन की अश्वसामर्थ्य भी मालूम करो जो इस कर्म को एक घंटे में कर लेता है।

[टिप्पणी—पानी के एक घन फुट का भार 1000 औंस होता है।]

आरम्भ में पानी के गुरुत्व-केन्द्र की कुँये की तह से ऊँचाई 150 फुट है और अन्त में वह 300 फुट है, इस प्रकार जिस ऊँचाई में होकर उसका गुरुत्व-केन्द्र उठा है वह 150 फुट है।

पानी का घनफल  $4 \times 4 \times 300$  घन फुट है ।

इसलिये उसका भार  $= 4 \times 4 \times 300 \times \frac{1000}{1} \text{ पौ०} = 300,000 \text{ पौ०} ।$

अतः कृत-कर्म  $= 300,000 \times 150 \text{ फुट-पौ०} = 45,000,000 \text{ फुट-पौ०} ।$

यदि  $x$  इष्ट अश्वसामर्थ्य है, तो इंजन ने एक घंटे में  $x \times 60 \times 33,000$  कर्म किया है ।

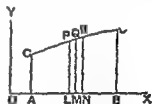
अतः  $x \times 60 \times 33,000 = 45,000,000;$

$$\therefore x = 22\frac{1}{3}.$$

१३३—बल द्वारा किये हुये कर्म का लेखा-चित्रात्मक प्रतिदर्शन ।

कभी कभी चर बल द्वारा किये गये कर्म की सीधी साधी गणना करना कठिन होता है, परन्तु परिमाण को लगभग शुद्ध निकालना बिलकुल सम्भव होता है ।

मान लो बल हमेशा उसी सरल रेखा  $OX$  में कार्य करता है, और मान लो प्रयोग-बिन्दु  $A$  से  $B$  को हट जाने पर हमें कृत-कर्म निकालना है ।  $A$  और  $B$  पर  $AC$  और  $DB$  कोटियाँ इन प्रयोग-बिन्दुओं पर बलों के मानों को प्रदर्शित करते हुये खींचो । बीच के किसी प्रयोग-बिन्दु  $L$  पर कोटि  $LP$  कार्य करते हुये बल के संगत मान को प्रदर्शित करती हुई खींचो ; अब इन कोटियों के शिखर किसी  $CPD$  जैसे वक्र पर होंगे ।



$L$  के इतने ही निकट एक बिन्दु  $M$  लो, कि जब प्रयोग-बिन्दु  $LM$  दूरी हट जाय तो बल स्थिर ही माना जा सके ।

इसलिये बल द्वारा किया गया कर्म  $=$  बल का परिमाण  $\times$  वह दूरी जो उसका प्रयोग-बिन्दु हटा है  $= LP \times LM =$  लगभग क्षेत्रफल  $PM$  ।

इसी प्रकार जब प्रयोग-बिन्दु  $M$  से  $N$  को हटता है तो कृत-कर्म  $=$  लगभग क्षेत्रफल  $QN$ , इत्यादि ।

अतः यह परिणाम निकलता है कि जब प्रयोग-बिन्दु  $A$  से  $B$  को हटा  
ह, तो कुल-कर्म  $ACDB$  क्षेत्रफल के उतना ही अधिक निकट होता जायगा  
जितनी अधिक छोटी लम्बाइयाँ  $LM, MN, \dots$  ली जायें।

[जब वक्र  $CPD$  विषम हो तो लगभग क्षेत्रफल इस प्रकार निकाला जा  
सकता है ;  $AB$  को कुछ, मान लो 10, बराबर बराबर लम्बे संकीर्ण सण्डों में  
विभाजित करो ; इन खण्डों की बीच की कोटियाँ लो और इन बीच की  
कोटियों का औसत निकालो ; और इन औसत कोटि को  $AB$  दूरी से गुणा  
करो। इसमें  $ACDB$  का लगभग क्षेत्रफल मालूम हो जायगा।]

१३४—ऊपर की रचना के उदाहरण के रूप में मान लो हमें उस  
बल से किया हुआ कर्म मालूम करना है जो आरम्भ में शून्य या और जो  
प्रयोग-बिन्दु के हटने के साथ साथ बदलता गया।

यहाँ  $AC$  शून्य है, और  $NP = \lambda \cdot AN$ , जहाँ पर  $\lambda$  कोई अचर राशि है।

$\therefore$  स्पष्टता  $PAV = \frac{PN}{AN} = \lambda$ , अतः  $P$ ,  $A$  से

जाती हुई सरल रेखा पर होगा। इसलिये कुल-कर्म  
 $=$  क्षेत्रफल  $ABD = \frac{1}{2} AB \cdot BD = \frac{1}{2} \times$  प्रयोग-बिन्दु का  
स्थानान्तर  $\times$  बल का अन्तिम मान।



### उदाहरणमाला २१

१। एक आदमी कितना कर्म करेगा

(क) 2700 फुट ऊँचे पहाड़ के शिखर पर चढ़ने में यदि उसका  
भार 10 स्टोन है ?

(ख) 10 मील साइकिल पर जाने में यदि उसकी गति का प्रतिरोध  
5 पौं० भार के बराबर है ?

२। एक जंजीर जिसका भार प्रति फुट 8 पौं० है, घुरादंड से,

कर्म की 40 लाख इकाइयों के खर्च करने पर, लपेटी गई है ; जंजीर की लम्बाई मालूम करो ।

३ । एक सुरंग, जिसका क्षैतिज परिच्छेद एक आयत है जिसकी लम्बाई 10 फुट और चौड़ाई 11 फुट है, पृथ्वी में 100 फुट गहरी खोदी गई है । यदि मिट्टी का औसत भार प्रति घन फुट 150 पौ० है तो बताओ मिट्टी को पृथ्वी के तल तक लाने में कितना कर्म करना पड़ा है ?

४ । कितना घन फुट पानी 100 अश्व-सामर्थ्य का इंजन एक घण्टे में 150 फुट की गहराई से उठायेगा ?

५ । कितने घंटों में 18 अश्व-सामर्थ्य का इंजन पानी से भरी हुई ऊर्ध्वाधर सुरंग को जिसका व्यास 9 फुट और गहराई 420 फुट है, खाली करेगा ?

६ । उस इंजन की अश्व-सामर्थ्य मालूम करो जो पानी से भरी बेलनाकार सुरंग को जिसका व्यास 8 फुट और गहराई 600 फुट है, 32 घंटों में खाली करेगा ।

७ । 20 अश्व-सामर्थ्य के एक इंजन को 5000 घन फुट पानी 100 फुट की ऊँचाई पर पम्प करने में कितना समय लगेगा, यदि कर्म का एक-तिहाई भाग रगड़ इत्यादि से नष्ट हो जाता है ।

८ । एक आदमी जिसका भार 10 स्टोन है, 18 इंच प्रति सैकण्ड की दर से एक रस्सी पर चढ़ रहा है । सिद्ध करो कि वह 3 अश्व-सामर्थ्य से कुछ कम कर्म कर रहा है ।

९ । ईंटों की एक मीनार बनवानी है, जिसका आधार एक आयत है जिसकी बाहरी नापें 22 फुट और 9 फुट, ऊँचाई 66 फुट और दीवारों की मोटाई 2 फुट है । कितने घण्टों में 3 अश्व सामर्थ्य का एक इंजन ईंटों को पृथ्वी से उठायेगा यदि एक घन फुट ईंट का भार 112 पौ० है ?

१० । 275 फुट गहरी कोयले की एक खान की तह पर लोहे का कोयले से भरा हुआ एक पिजरा है जिस में लोहे का भार 14 हंडरेडवेट है ; केवल पिजरे का भार 4 हंडरेडवेट 109 पौ० है और तार का भार जो पिजरे को



उठाता है 6 फी० प्रति गज है । शोभ को पृथ्वी के तल तक उठाने में कितना कर्म करना पड़ेगा और उस इंजन की अद्व-सामर्थ्य मालूम करो जो उस कर्म को 40 सेकण्ड में करता है ।

११ । एक जहाज 15 मील प्रति घण्टे की चाल से जा रहा है । यदि उसके इंजनों की फलवत् अद्व-सामर्थ्य 10,000 है, तो बताओ उसकी गति का प्रतिरोध क्या है ?

१२ । एक आदमी 11 मील प्रति घंटे की दर से एक पहाड़ी के ऊपर साइकिल चला रहा है ; पहाड़ी का ढाल 20 में 1 है ; यदि आदमी और साइकिल का भार 200 फी० है तो सिद्ध करो कि वह कमसे कम 16 अद्व-सामर्थ्य से कर्म कर रहा है ।

१३ । एक आदमी एक मिनट में ४० बार आघात करके नाव को 10 मील प्रति घण्टे की दर से खे रहा है और उसकी गति का प्रतिरोध 8 फी० भार के बराबर है ; बताओ प्रत्येक आघात में वह कितना कर्म करता है और किस अद्व-सामर्थ्य से वह कर्म कर रहा है ?

१४ । एक बेनीशियन झिलमिली में 30 चर छड़े हैं जिनकी मोटाई उपेक्षणीय है और जब वह नीचे लटक रही होती है तो रुमागत छड़ों के प्रत्येक जोड़े की दूरी  $2\frac{1}{2}$  इंच रहती है । यदि प्रत्येक छड़ का भार 4 औंस हो, तो बताओ झिलमिली के ऊपर खींचने में कितना कर्म करना पड़ेगा ?

यदि ऐसी  $n$  छड़े होतीं तो बताओ कितना कर्म करना पड़ता ?

१५ । एक बेनीशियन झिलमिली में शिखर की नियत छड़ के अतिरिक्त  $n$  पतली छड़ें हैं, और चर भाग का भार  $11'$  है । जब झिलमिली झुका दी जाती है तो उसकी लम्बाई  $a$  होती है और जब ऊपर खींच ली जाती है तो लम्बाई  $b$  होती है ; सिद्ध करो कि झिलमिली के ऊपर खींचने में गुरुत्व के विपरीत  $11' \cdot \frac{n+1}{2n} (a-b)$  कर्म करना पड़ता है ।

१६ । एक ठोस अर्द्धगोला, जिसका भार 12 फी० है और जिसकी त्रिज्या 1 फुट है, एक मेज पर अपने चौरस फलक पर रखा हुआ है ।

उसको इस प्रकार उलटने में कितने फुट-पोंड कर्म करना पड़ेगा कि उसका वक्र पृष्ठ मेज पर स्पर्श करते हुये वह समतुलित अवस्था में हो जाय ? (धारा 130 के फल का प्रयोग करो ।)

१७। लकड़ी का एक सम कुंदा जिसका भार आधा टन है त्रिकोणा-धार समपाद्वर्ग के आकार का है। उसके अनुप्रस्थ परिच्छेद की भुजायें क्रमसे  $1\frac{1}{2}$  फुट, 2 फुट और  $2\frac{1}{2}$  फुट हैं। कुंदा पृथ्वी पर अपने सबसे छोटे फलक पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि उसको एक कोर पर इस प्रकार उठाने में कि वह अपने सबसे चौड़े फलक पर गिर पड़े लगभग 27 फुट-टन कर्म करता पड़ेगा।

१८। एक बल एक वज्र पर इस प्रकार कार्य करता है कि उसका प्रारम्भ मान 20 पों० भार के बराबर है और जब वह क्रम से 1, 2, 3, 4, 5, और 6 फुट हट जाता है तो उसके मान वज्र की गति की दिशा में 25, 29, 32, 31, 27, और 24 पों० भार के बराबर होते हैं। यह मान कर कि प्रत्येक फुट के स्थान्तरण में बल समान रूप से परिणमित होता है, बल द्वारा किया गया कर्म लेखा-चित्र द्वारा मालूम करो।

## अध्याय १२

### मशीन

(Machines)

१३५—इस अध्याय में हम कुछ साधारण मशीनों के समुलन पर विचार तथा उनकी व्याख्या करेंगे। यह मशीन (१) लीवर, (२) घिरती तथा घिरनियों की श्रेणी, (३) आनत घरातल, (४) चक्र-धुरी, (५) साधारण तुला, (६) विषम-भुज-तुला, और (७) पेच (स्कू) हैं।

लीवर, चक्र-धुरी, तुला और विषम-भुज-तुला एक ही प्रकार की मशीनें हैं। इनमें या तो एक बिन्दु या एक अक्ष नियत होता है जिसके चारों ओर मशीन घूमती है।

घिरनियों के लचीली डोरी अथवा डोरियाँ आवश्यक भाग होते हैं।

हम यह मान लेंगे कि इन मशीनों के भिन्न भिन्न भाग चिकने और दृढ़ हैं, और प्रयुजा गभी तागे अथवा डोरियाँ पूर्णतया लचीली हैं, और मशीनों पर कार्य करते हुये बल समतुलित अवस्था में हैं।

वास्तविक व्यवहार में ये प्रतिबंध बहुत ही मशीनों में प्रायः सन्तुष्ट नहीं होते।

१३६—जब किसी मशीन पर दो लगाये गये बाह्य बल समतुलित होते हैं, तो एक बल को सामर्थ्य और दूसरे को भार कहते हैं।

व्यवहार में मशीन किसी प्रतिरोध को पराजित करने के कार्य में लाई जाती है; जिस बल को हम मशीन पर लगाते हैं सामर्थ्य कहलाती है, और प्रतिरोध जिसे पराजित किया जाता है चाहे वह किसी रूप में क्यों न हो भार कहलाती है।

दुर्भाग्य से शब्द सामर्थ्य का मशीन के सम्बन्ध में एक दूसरे प्रयोग होता है (धारा १३१); कुछ मशीनें जहाँ पहले शब्द

का प्रयोग होता था अब शब्द प्रयास का प्रयोग होने लगा है। भार की जगह शब्द प्रतिबल भी प्रयोग में आता है; कुछ लेखक भार के स्थान पर बोझ शब्द का भी प्रयोग करते हैं।

१३७—यांत्रिक लाभ। यदि किसी मशीन में सामर्थ्य  $P$  और प्रतिरोध  $W$  समतुलित हो तो निष्पत्ति  $W : P$  को मशीन का यांत्रिक लाभ कहते हैं;

इस प्रकार  $\frac{\text{प्रतिरोध}}{\text{सामर्थ्य}} = \text{यांत्रिक लाभ},$

और  $\text{प्रतिरोध} = \text{सामर्थ्य} \times \text{यांत्रिक लाभ}।$

प्रायः सभी मशीनें ऐसी बनी होती हैं कि यांत्रिक लाभ वह निष्पत्ति होती है जो इकाई से बड़ी है।

यदि किसी मशीन में यांत्रिक लाभ इकाई से कम हो तो उसे यांत्रिक हानि कह सकते हैं।

बल-निष्पत्ति शब्द का भी कभी कभी यांत्रिक लाभ की जगह प्रयोग होता है।

वेग-निष्पत्ति। सामर्थ्य के प्रयोग-बिन्दु के हटने की दूरी और उसी समय में प्रतिरोध के प्रयोग-बिन्दु के हटने की दूरी की निष्पत्ति को मशीन की वेग-निष्पत्ति कहते हैं, इस प्रकार वेग-निष्पत्ति

$$= \frac{\text{दूरी जो } P \text{ हटता है}}{\text{दूरी जो } W \text{ हटता है}}।$$

यदि मशीन इस प्रकार की हो कि उसके अवयव भागों के उठाने में कोई कर्म न हो और वह पूर्णतया चिकनी हो, तो यांत्रिक लाभ और वेग-निष्पत्ति बराबर होगी, इसलिये

$$\frac{W}{P} = \frac{\text{दूरी जो } P \text{ हटता है}}{\text{दूरी जो } W \text{ हटता है}},$$

और इसलिये,  $P \times \text{दूरी जो } P \text{ हटता है} = W \times \text{दूरी जो } W \text{ हटता है},$  अर्थात्

$P$  में  $\therefore$  कर्म  $= W$  के विपरीत किया गया कर्म।

## अध्याय १२

### मशीन

(Machines)

१३५—इस अध्याय में हम कुछ साधारण मशीनों के समतुलन पर विचार तथा उनकी व्याख्या करेंगे। यह मशीन (१) लीवर, (२) घिरली तथा घिरनियों की थेंगो, (३) आनत धरातल, (४) चक्र-धुरी, (५) साधारण तुला, (६) विषम-भुज-तुला, और (७) पेंच (स्कू) हैं।

लीवर, चक्र-धुरी, तुला और विषम-भुज-तुला एक ही प्रकार की मशीनें हैं। इनमें या तो एक बिन्दु या एक अक्ष नियत होता है जिसके चारों ओर मशीन घूमती है।

घिरनियों के लचीली डोरी अथवा डोरियाँ आवश्यक भाग होते हैं।

हम यह मान लेंगे कि इन मशीनों के भिन्न भिन्न भाग चिकने और दृढ़ हैं, और प्रयुजा सभी तागे अथवा डोरियाँ पूर्णतया लचीली हैं, और मशीनों पर कार्य करते हुये बल समतुलित अवस्था में हैं।

वास्तविक व्यवहार में ये प्रतिबन्ध बहुत ही मशीनों में प्रायः सन्तुष्ट नहीं होते।

१३६—जब किसी मशीन पर दो लगाये गये बाह्य बल समतुलित होते हैं, तो एक बल को सामर्थ्य और दूसरे को भार कहते हैं।

व्यवहार में मशीन किसी प्रतिरोध को पराजित करने के कार्य में लाई जाती है; जिस बल को हम मशीन पर लगाते हैं सामर्थ्य कहलाती है, और प्रतिरोध जिसे पराजित किया जाता है चाहे वह किसी रूप में क्यों न हो भार कहलाती है।

दुर्भाग्य से शब्द सामर्थ्य का मशीन के सम्बन्ध में एक दूसरे अर्थ में भी प्रयोग होता है (धारा १३१); कुछ पिछले वक्तों में जहाँ पहले शब्द सामर्थ्य

का प्रयोग होता था अब शब्द प्रयास का प्रयोग होने लगा है। भार की जगह शब्द प्रतिबल भी प्रयोग में आता है ; कुछ लेखक भार के स्थान पर बोझ शब्द का भी प्रयोग करते हैं।

१३७—यांत्रिक लाभ। यदि किसी मशीन में सामर्थ्य  $P$  और प्रतिरोध  $W$  समतुलित हो तो निष्पत्ति  $W' : P$  को मशीन का यांत्रिक लाभ कहते हैं ;

इस प्रकार  $\frac{\text{प्रतिरोध}}{\text{सामर्थ्य}} = \text{यांत्रिक लाभ,}$

और  $\text{प्रतिरोध} = \text{सामर्थ्य} \times \text{यांत्रिक लाभ}।$

प्रायः सभी मशीनें ऐसी बनी होती हैं कि यांत्रिक लाभ वह निष्पत्ति होती है जो इकाई से बड़ी है।

यदि किसी मशीन में यांत्रिक लाभ इकाई से कम हो तो उसे यांत्रिक हानि कह सकते हैं।

बल-निष्पत्ति शब्द का भी कभी कभी यांत्रिक लाभ की जगह प्रयोग होता है।

वेग-निष्पत्ति। सामर्थ्य के प्रयोग-बिन्दु के हटने की दूरी और उसी समय में प्रतिरोध के प्रयोग-बिन्दु के हटने की दूरी को निष्पत्ति को मशीन की वेग-निष्पत्ति कहते हैं, इस प्रकार वेग-निष्पत्ति

$$= \frac{\text{दूरी जो } P \text{ हटता है}}{\text{दूरी जो } W \text{ हटता है}}।$$

यदि मशीन इस प्रकार की हो कि उसके अवयव भागों के उठाने में कोई काम न हो और वह पूर्णतया चिकनी हो, तो यांत्रिक लाभ और वेग-निष्पत्ति बराबर होगी, इसलिये

$$\frac{W'}{P} = \frac{\text{दूरी जो } P \text{ हटता है}}{\text{दूरी जो } W' \text{ हटता है}}।$$

और इसलिये,  $P \times \text{दूरी जो } P \text{ हटता है} = W' \times \text{दूरी जो } W' \text{ हटता है,}$  अर्थात्

$P$  से किया गया काम  $= W'$  के विपरीत किया गया काम।

## अध्याय १२

### मशीन

(Machines)

१३५—इस अध्याय में हम कुछ साधारण मशीनों के समतुलन पर विचार तथा उनकी व्याख्या करेंगे। यह मशीन (१) लीवर, (२) घिरती तथा घिरनियों की श्रेणी, (३) आनत धरातल, (४) चक्र-धुरी, (५) साधारण तुला, (६) विषम-भुज-तुला, और (७) पेच (स्कू) हैं।

लीवर, चक्र-धुरी, तुला और विषम-भुज-तुला एक ही प्रकार की मशीनें हैं। इनमें या तो एक बिन्दु या एक अक्ष नियत होता है जिसके चारों ओर मशीन घूमती है।

घिरनियों के लचीली डोरी अथवा डोरियाँ आवश्यक भाग होते हैं।

हम यह मान लेते हैं कि इन मशीनों के भिन्न भिन्न भाग चिकने और दृढ़ हैं, और प्रयुजा सभी तागे अथवा डोरियाँ पूर्णतया लचीली हैं, और मशीनों पर कार्य करते हुये बल समतुलित अवस्था में हैं।

वास्तविक व्यवहार में ये प्रतिबन्ध बहुत ही मशीनों में प्रायः सन्तुष्ट नहीं होते।

१३६—जब किसी मशीन पर दो लगाये गये बाह्य बल समतुलित होते हैं, तो एक बल को सामर्थ्य और दूसरे को भार कहते हैं।

व्यवहार में मशीन किसी प्रतिरोध को पराजित करने के कार्य में लाई जाती है; जिस बल को हम मशीन पर लगाते हैं सामर्थ्य कहलाती है, और प्रतिरोध जिसे पराजित किया जाता है चाहे वह किसी रूप में क्यों न हो भार कहलाती है।

दुर्भाग्य से शब्द सामर्थ्य का मशीन के सम्बन्ध में एक दूसरे अर्थ में भी प्रयोग होता है (धारा १३१); कुछ पिछले वर्षों से यही पहले शब्द सामर्थ्य

## (क) लीवर

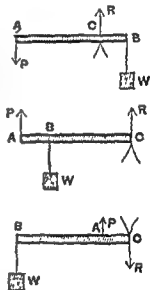
१४०—लीवर में एक दृढ़ दंड, सीधा अथवा टेढ़ा, होता है, जिसका एक बिन्दु नियत होता है जिसके चारों ओर बाकी लीवर घूम सकता है। इस नियत बिन्दु को आलम्ब कहते हैं, आलम्ब और सामर्थ्य और भार की क्रिया-रेखाओं के बीच की लम्ब दूरियों को लीवर की भुजायें कहते हैं।

जब लीवर सीधा होता है और सामर्थ्य और भार लीवर पर लम्ब होते हैं, तो उसकी तीन श्रेणियाँ होती हैं।

पहली श्रेणी। इसमें सामर्थ्य  $P$  और भार  $W$  आलम्ब  $C$  के विपरीत ओर कार्य करते हैं।

दूसरी श्रेणी। इसमें सामर्थ्य  $P$  और भार  $W$  आलम्ब  $C$  के एक ही ओर कार्य करते हैं, परन्तु सामर्थ्य भार की अपेक्षा आलम्ब से अधिक दूरी पर कार्य करता है।

तीसरी श्रेणी। इसमें सामर्थ्य  $P$  और भार  $W$  आलम्ब  $C$  के एक ही ओर कार्य करते हैं, परन्तु सामर्थ्य भार की अपेक्षा आलम्ब से कम दूरी पर कार्य करता है।



१४१—सीधे लीवर के समतुलन के नियम।

तीनों स्थितियों में तीन समानान्तर बल लीवर पर कार्य करते हैं, इसलिये आलम्ब पर प्रतिकूल  $R$ ,  $P$  और  $W$  के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा।

पहली श्रेणी में  $P$  और  $W$  सम समानान्तर बल हैं, इसलिये उनका परिणामीबल  $P+W$  है। अतः

$$R = P + W.$$



१३८--निम्न गिद्दान, जिमें कर्म का सिद्धान्त कहते हैं, सर्वसाधारण गिद्दान है। चाहे हम किसी भी मशीन का प्रयोग क्यों न करें, यदि धींग नहीं है और मशीन का भार उपेक्षणीय है, तो सामर्थ्य से किया गया कर्म हमें उस भार अथवा प्रतिरोध के विपरीत किये गये कर्म के बराबर होता है।

मान लो जिस मशीन का हम प्रयोग करते हैं उससे यांत्रिक लाभ है, तो सामर्थ्य भार से कम होगा, और वह दूरी जो सामर्थ्य का प्रयोग-बिन्दु हटता है उसी अनुपात में उस दूरी में अधिक होगी जो भार का प्रयोग-बिन्दु हटेंगा। इसे कभी कभी साधारण भाषा में इस प्रकार कहते हैं; 'सामर्थ्य में जितना लाभ होता है वेग में उतनी ही हानि होती है'।

इमें इस प्रकार कहना और भी ठीक होगा कि यांत्रिक लाभ वेग की उभी अनुपात में कमी से प्राप्त होता है। मशीन के प्रयोग से कर्म की प्राप्ति कभी नहीं होती यद्यपि यांत्रिक लाभ प्रायः प्राप्त हो जाता है।

१३९—अगले अध्याय में यह मालूम होगा कि व्यवहार में मशीन के प्रयोग से कुछ न कुछ कर्म की अवश्य हानि होती है।

मशीन के लाभ निम्नलिखित हैं : मशीन के प्रयोग से .

(१) एक आदमी वह भार उठा सकता है अथवा उन प्रतिरोधों को पराजित कर सकता है जो वह बिना सहायता के नहीं कर सकता, जैसे, घिरनीयों की श्रेणी, अथवा चक्रधुरी, अथवा जैक स्कू, इत्यादि के प्रयोग से।

(२) एक बिन्दु पर लगाये हुये वेग को किसी दूसरे बिन्दु पर अधिक तेज वेग में स्थानान्तरित किया जा सकता है, जैसे कि साईकिल के प्रयोग में।

(३) कोई बल अधिक उपयुक्त बिन्दु पर अथवा अधिक उपयुक्त रीति से लगाया जा सकता है जैसे अग्नि उत्तेजित करने में फुफ्फुसी का प्रयोग, अथवा किसी इमारत के गिखर पर लगी हुई घिरनी के ऊपर होकर जाती हुई लम्बी रस्सी द्वारा गारे की बाल्टी उठाने में रस्सी के दूसरे सिरे पर पृथ्वी पर खड़े हुये आदमी द्वारा लगाया हुआ बल।

## (क) लीवर

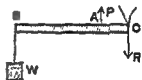
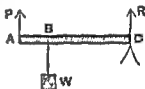
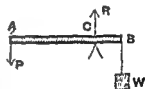
१४०—लीवर में एक दृढ़ दंड, सीधा अथवा टेढ़ा, होता है, जिसका एक बिन्दु नियत होता है जिसके चारों ओर बाकी लीवर घूम सकता है। इस नियत बिन्दु को आलम्ब कहते हैं, आलम्ब और सामर्थ्य और भार की क्रिया-रेखाओं के बीच की लम्ब दूरियों को लीवर की भुजाये कहते हैं।

जब लीवर सीधा होता है और सामर्थ्य और भार लीवर पर लम्ब होते हैं, तो उसकी तीन श्रेणियाँ होती हैं।

पहली श्रेणी। इसमें सामर्थ्य  $P$  और भार  $W$  आलम्ब  $C$  के विपरीत ओर कार्य करते हैं।

दूसरी श्रेणी। इसमें सामर्थ्य  $P$  और भार  $W$  आलम्ब  $C$  के एक ही ओर कार्य करते हैं, परन्तु सामर्थ्य भार की अपेक्षा आलम्ब से अधिक दूरी पर कार्य करता है।

तीसरी श्रेणी। इसमें सामर्थ्य  $P$  और भार  $W$  आलम्ब  $C$  के एक ही ओर कार्य करते हैं, परन्तु सामर्थ्य भार की अपेक्षा आलम्ब से कम दूरी पर कार्य करता है।



१४१—सीधे लीवर के समतुलन के नियम।

तीनों स्थितियों में तीन समानान्तर बल लीवर पर कार्य करते हैं, इसलिये आलम्ब पर प्रतिकूल  $R$ ,  $P$  और  $W$  के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा।

पहली श्रेणी में  $P$  और  $W$  सम समानान्तर बल हैं, इसलिये उनका परिणामीबल  $P+W$  है। अतः

$$R = P + W.$$

दूसरी श्रेणी में  $P$  और  $W$  विषम समानान्तर बल हैं, इसलिये

$$R = W - P.$$

इसी प्रकार तीसरी श्रेणी में

$$R = P - W.$$

पहली और तीसरी श्रेणी में हम देखते हैं कि  $R$  और  $P$  विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं, दूसरी श्रेणी में वे एक ही दिशा में कार्य करते हैं।

तीनों श्रेणियों में, चूंकि  $P$  और  $W$  का परिणामी बल  $C$  से जाता है, इसलिये जैसा धारा ५२ में,

$$P \cdot AC = W \cdot BC,$$

अर्थात्  $P \times P$  की भुजा  $= W \times W$  की भुजा।

चूंकि  $\frac{W}{P} = \frac{P \text{ की भुजा }}{W \text{ की भुजा }}$ , हम देखते हैं कि पहली श्रेणी में प्रायः और

दूसरी श्रेणी में ह्रस्व यांत्रिक लाभ होता है, परन्तु तीसरी श्रेणी में यांत्रिक हानि होती है।

तीसरी श्रेणी के लीवर से व्यवहारिक लाभ यह है कि एक ऐसे बिन्दु पर बल लगाया जा सकता है जिसपर सीधे सीधे बल का लगाना अभुविधाजनक होता है।

इस धारा में हमने लीवर के भार को नगण्य माना है।

यदि इस भार पर भी विचार किया जाय, तो जैसा धारा ९१ में, हम सम-तुलन के प्रतिबन्ध  $C$  आलम्ब पर बलों के धूर्णों के बीजीय योग को शून्य के बराबर रखकर मालूम कर सकते हैं।

लीवर का सिद्धान्त आर्कमीडीज को मालूम था, जो ईसा में पहले तीसरी शताब्दी में था। मोलह्वो शताब्दी में बल-समानान्तर-चतुर्भुज के आविष्कार तक स्थिति विज्ञान का यही मौलिक सिद्धान्त था।

१४२—भिन्न श्रेणियों के लीवरों का उदाहरण:

पहली श्रेणी। पोरर (जब उसका प्रयोग अग्नि उत्तेजित करने में होता है, और संयंत्रों की एक श्रृंखला का भाग बनता है)। बल—हैमर

(जब उसका प्रयोग कील निकालने में होता है) ; को-वार (जब उसका प्रयोग उसके एक बिन्दु को किसी नियत आलम्बन पर रख कर होता है) ; तुला ; पम्प का ब्रेक, इत्यादि ।

इस श्रेणी के द्विक लीवर : कंची , चिमटा, इत्यादि ।

दूसरी श्रेणी । बर्तल-बैरो ; डाट खोलने का पेन ; क्री-वार (जब उसका एक सिरा भूमि से लगा हो) ; डांड (जब पानी से स्पर्श करता हुआ उसका सिरा स्थिर माना जाय ।)

सबसे इस श्रेणी का द्विक लीवर है ।

तीसरी श्रेणी । खराब का ट्रेडिल ; मनुष्य का कोहनी से कलाई तक हाथ (जब उसे हथेली पर भार रखकर साधना होता है ; कोहनी आलम्ब होती है और मांसपेशी से लगाया गया बल सामर्थ्य होता है)

सँझसी इस श्रेणी का द्विक लीवर है ।

१४३—टेंदे लीवर । मान लो  $AOB$  एक टेंदा लीवर है जिसका आलम्ब  $O$  है, और मान लो  $OL$  और  $OM$ ,  $O$  से सामर्थ्य  $P$  और प्रतिरोध  $W$  की क्रिया-रेखाओं  $AC$  और  $BC$  पर लम्ब है ।

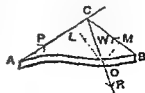
धारा ९१ के समतुलन के प्रतिबन्धों का प्रयोग करके अर्थात्  $O$  पर घूर्ण लेकर

$$P \cdot OL = W \cdot OM \quad \dots \quad (1);$$

$$\therefore \frac{P}{W} = \frac{OM}{OL}$$

$$= \frac{\text{आलम्ब से प्रतिरोध की क्रिया-रेखा पर लम्ब}}{\text{आलम्ब से सामर्थ्य की क्रिया-रेखा पर लम्ब}}$$

$O$  पर प्रतिबल निकालने के लिये मान लो कि  $P$  और  $W$  की क्रिया-रेखाएँ  $C$  पर मिलती हैं । चूँकि लीवर पर केवल तीन बल कार्य करते हैं,  $O$  पर प्रतिबल  $R$  की क्रिया-रेखा  $C$  से जायमी, इसलिये लामो के प्रमेय से,



$$\frac{R}{\text{ज्या } ACB} = \frac{P}{\text{ज्या } BCO} = \frac{W}{\text{ज्या } ACO}$$

प्रतिबन्ध, जैसा कि धारा ४६ में  $R, P$ , और  $W'$  को दो लम्ब दिशाओं में विदिलिप्त करके भी मालूम किया जा सकता है ।

यदि सामर्थ्य और प्रतिरोध ममानान्तर बल हों, तो प्रतिबल  $R$  इनके समानान्तर और  $(P+W')$  के बराबर होगा, और पट्टे की भाँति

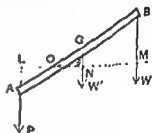
$$P.O.L = W'.O.M,$$

जहाँ पर  $OL$  और  $OM$ ,  $O$  से बलों की क्रिया-रेखाओं पर लीये गये लम्ब हैं ।

यदि लीवर का भार  $W'$  उपेक्षणीय न हो तो हमें पूर्ण के समीकरण में एक और अधिक पद लाना पड़ेगा ।

१४४—यदि किसी सीधे लीवर के सिरो पर जो ऊर्ध्वाधर से किसी मो कोण पर झुका हुआ है, रखे हुये दो भार आलम्ब पर समतुलित हों, तो वे लीवर के ऊर्ध्वाधर से कोई दूसरा कोण बनाने पर भी समतुलित रहेंगे ।

मान लो  $AB$  लीवर है, जिसका भार  $W'$  है, और  $G$  उसका गुरुत्व-केन्द्र है । मान लो लीवर आलम्ब  $O$  पर समतुलित है जब वह क्षैतिज से  $\theta$  कोण बनाता है, और  $A$  और  $B$  पर क्रमसे  $P$  और  $W$  भार रखे हैं ।



$O$  से एक क्षैतिज रेखा  $LONM$  खींचो जो  $P, W'$ , और  $W$  की क्रिया-रेखाओं को क्रमसे  $L, N$ , और  $M$  पर मिले ।

चूँकि बल  $O$  पर समतुलित रहते हैं, इसलिये

$$P.O.L = W'.O.M + W'.O.N.$$

$$\therefore P.OA \cos \theta = W'.OB \cos \theta + W'.OG \cos \theta.$$

$$\therefore P.OA = W'.OB + W'.OG.$$

यह समतुलन का प्रतिबन्ध लीवर के क्षैतिज से झुकाव  $\theta$  से स्वतंत्र है ; अतः लीवर को किसी दूसरी स्थिति के लिये भी यह सत्य रहेगा ।

अतः यदि लीवर एक स्थिति में समतुलित रहे तो वह सब स्थितियों में भी समतुलित रहेगा ।

## उदाहरणमाला २२

१। बिना भार के किसी लीवर में यदि एक बल 10 पौ० भार के बराबर है और आलम्ब पर प्रतिबल 16 पौ० भार के बराबर है, और छोटी भुजा की लम्बाई 3 फुट है, तो बड़ी भुजा की लम्बाई मालूम करो ।

२। बताओ आलम्ब कहाँ होगा जबकि 6 पौ० का एक भार एक 7 फुट लम्बे मीचे बिना भार के लीवर पर 8 पौ० के भार से समतुलित होता है ?

यदि प्रत्येक भार एक पौ० बढ़ा दिया जाय तो बताओ किस ओर लीवर घूम जायगा ?

३। यदि किसी बिना भार के लीवर पर लगाये गये दो बल सम-तुलित हों, और यदि आलम्ब पर प्रतिबल बलों के अन्तर का दस गुना हो, तो भुजाओं की निष्पत्ति मालूम करो ।

४। एक गज लम्बे एक लीवर के सिरों पर 6 और 20 पौ० के भार लगे हुये हैं और वह एक सिरे से 9 इंच की दूरी पर समतुलित रहता है । लीवर का भार मालूम करो ।

५। 12 फुट लम्बा एक सीधा लीवर  $AB$ ,  $A$  से 1 फुट दूर एक बिन्दु पर समतुलित होता है जब  $A$  से 13 पौ० का भार लटकाया जाय । वह  $B$  से 1 फुट दूर एक बिन्दु पर समतुलित होता है जब  $B$  से 11 पौ० का भार लटकाया जाय । सिद्ध करो कि लीवर का गुरुत्व-केन्द्र उसके मध्य-बिन्दु से 5 इंच दूर है ।

६। एक सीधा सम लीवर उसकी भुजाओं के मिरों पर लगे हुये 12 पौ० और 5 पौ० भारों से समतुलित रहता है और एक भुजा की लम्बाई दूसरी से दुगुनी है । लीवर का भार क्या है ?

७। एक सीधे सम लीवर का आलम्ब, जिसकी लम्बाई 5 फुट और भार 10 पौ० है, एक सिरे पर है । 3 और 6 पौ० के भार आलम्ब से क्रमशः 1 और 3 फुट की दूरी पर लगे हैं, तथा दूसरे सिरे पर लगाया गया एक बल उसे धैर्य अवस्था में रखता है । आलम्ब पर प्रतिबल मालूम करो ।

२१। एक घनाकार कुन्दा जिमकी कोर  $a$  है, एक त्रोबार से उसकी कोर के मध्य-बिन्दु पर, गुरुत्व-केन्द्र में गीचे गये घरातल में लगाकर उल्टा जा रहा है। यदि त्रोबार को, जब वह क्षैतिज से  $60^\circ$  के कोण पर झुका हो, रोक लिया जाय, तो कुन्दे का नीचे का फलक क्षैतिज से  $30^\circ$  का कोण बनाना है। यदि कुन्दे का भार लगाये हुये बल का  $n$  गुना हो, तो त्रोबार की लम्बाई मालूम करो, बल त्रोबार में समकोण बनाना हुआ लगाया गया है।

### (ख) घिरनियाँ

१४५—घिरनी में लकड़ी अथवा घातु का एक पहिया होता है जिसकी परिधि में नाली बनी होती है जिसमें डोरी अथवा रस्सी डाली जाती है; वह घुरी के चारों ओर जो पहिये के केन्द्र से जाती है और उसके घरातल पर लम्ब रहती है, बेरोक घूम सकती है; इस घुरी के सिरे लकड़ी के एक टाँचे पर, जिसे घिरनी का आधार गुटका कहते हैं, जड़े रहते हैं।

घिरनी को अनियत अथवा नियत कहते हैं जब उसका गुटका अनियत अथवा नियत रहता है।

घिरनी का भार उन भारों की तुलना में जो वह सम्हालती है प्रायः इतना कम होता है कि उसको नगण्य माना जा सकता है; ऐसी घिरनी को बिना भार की घिरनी कहते हैं।

हम डोरी अथवा रस्सी के भार को जो घिरनी के ऊपर जाती है नगण्य मानेंगे।

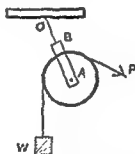
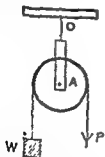
इम अध्याय में हम घिरनियों को पूरी तौर से चिकनी मानेंगे, इसलिये घिरनियों के ऊपर जाती हुई डोरियों के तनाव सारी लम्बाई में स्थिर रहेंगे।

१४६—एक मात्र घिरनी। एक मात्र घिरनी में लाभ यह है कि इसकी सहायता से हम सामर्थ्य की भिन्न दिशा में जिसमें हमें सुविधा होती है लगा सकते हैं।

जैसे, पहले चित्र में, भूमि पर खड़ा हुआ एक आदमी रस्सी के एक सिरे को ऊर्ध्वाधर खींचता हुआ दूसरे सिरे पर लटकते हुये भार  $W$  को सम्हाल सकता है; दूसरे चित्र में वही आदमी तिरछा खींचता हुआ उभी भार को सम्हाल सकता है।

दोनों स्थितियों में धिरनी के ऊपर जाती हुई डोरी का तनाव नहीं बदलता; इसलिये सामर्थ्य  $P$  भार  $W$  के बराबर होता है।

पहले चित्र में नियत आलम्बन जिससे गुटका लगा हुआ है, पर प्रतिबल गुटके पर कार्य करते हुये अन्य बलों में समतुलित होता है, और इसलिये  $W + P + w$  अर्थात्  $2W + w$  के बराबर होगा जहाँ पर  $w$  धिरनी और गुटके का भार है।



दूसरे चित्र में, यदि धिरनी का भार नगण्य माना जाय, तो सामर्थ्य  $P$  और भार  $W$ , चूँकि यह बराबर है,  $OA$  रेखा में बराबर कोण बनायेंगे।

अतः यदि सम्हालनेवाली डोरी  $OB$  का तनाव  $T$ , और  $P$  और  $W$  की त्रिमा-रेखाओं के बीच का कोण  $2\theta$  हो, तो

$$T = P \cos \theta + W \cos \theta = 2W \cos \theta.$$

यदि धिरनी का भार  $w$  हो तो

$$T^2 = (W + w)^2 + P^2 + 2(W + w) \cdot P \cos 2\theta$$

$$= 2W^2 + 2Ww + w^2 + 2(W + w) \cdot W (2 \cos^2 \theta - 1), \text{ चूँकि } P \text{ और } W$$

$$\text{बराबर है,}$$

$$= w^2 + 4W(W + w) \cos^2 \theta.$$



१४७—अब हम घिरनियों की तीनों श्रेणियों पर विचार करेंगे और इसमें प्रचलित क्रम का ही अनुकरण करेंगे ; इस क्रम का कोई विशेष कारण नहीं है, परन्तु संकेत के लिये इसमें सुविधा है कि उसी क्रम को रखा जाय ।

घिरनियों की प्रथम श्रेणी । इसमें प्रत्येक डोरी समझालनेवाली कड़ी से बँधी होती है । सामर्थ्य अथवा 'शक्ति' और भार के बीच में सम्बन्ध मालूम करना ।

घिरनियों की इस श्रेणी में सबसे नीचे की घिरनी से भार लटकाया जाता है । इस घिरनी के चारों ओर जाने वाली डोरी का एक सिरा निम्न कड़ी से और दूसरा सिरा अगली ऊपर की घिरनी से बँधा होता है । इस दूसरी घिरनी के चारों ओर जाने वाली डोरी का एक सिरा नियत कड़ी से और दूसरा सिरा उससे अगली ऊपर की घिरनी में बँधा होता है, इत्यादि । सामर्थ्य अन्तिम डोरी के स्वतंत्र सिरे से लगाया जाता है ।

प्रायः एक और नियत घिरनी होती है जिसके ऊपर से अन्तिम डोरी का स्वतंत्र सिरा जाता है जिसमें सामर्थ्य को नीचे की ओर लगा सकते हैं ।

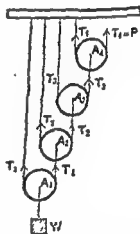
मान लो नीचे से आरम्भ करके घिरनियाँ  $A_1, A_2, \dots$  हैं, और मान लो इनके ऊपर जाती हुई डोरियों के तनाव  $T_1, T_2, \dots$  हैं । मान लो  $W$  भार और  $P$  सामर्थ्य हैं ।

[टिप्पणी—किमी भी घिरनी, मान लो  $A_2$  के ऊपर जाती हुई डोरी  $A_1$  को ऊर्ध्वाधर ऊपर और  $A_2$  को नीचे खींचती है ।]

(१) मान लो घिरनियों के भार उपेक्षणीय हैं ।

$A_1, A_2, \dots$  घिरनियों ने समतुल्य को यदि क्रम से लें, तो

$$2T_1 = W; \quad \therefore T_1 = \frac{1}{2} W.$$



$$2T_1 = T_1; \quad \therefore T_2 = \frac{1}{2}T_1 = \frac{1}{2^2}W.$$

$$2T_2 = T_2; \quad \therefore T_3 = \frac{1}{2}T_2 = \frac{1}{2^3}W.$$

$$2T_4 = T_3; \quad \therefore T_4 = \frac{1}{2}T_3 = \frac{1}{2^4}W.$$

परन्तु हमारे चित्र में,  $T_4 = P$ .

$$\therefore P = \frac{1}{2^4}W.$$

इसी प्रकार यदि  $n$  धिरनियाँ हों, तो

$$P = \frac{1}{2^n}W.$$

अतः धिरनियों की इस श्रेणी में, याविक  $\frac{W'}{P} = 2^n$ .

(२) मान लो सबसे नीचे से आरम्भ करके धिरनियों के भार क्रम से  $w_1, w_2, \dots$  हैं।

इस स्थिति में प्रत्येक धिरनी पर एक ओर बल नीचे की ओर कार्य करता है।

पहले की भाँति चिह्नित करके

$$2T_1 = W' + w_1,$$

$$2T_2 = T_1 + w_2,$$

$$2T_3 = T_2 + w_3,$$

$$2T_4 = T_3 + w_4.$$

$$\therefore T_1 = \frac{W'}{2} + \frac{w_1}{2},$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{w_2}{2} = \frac{W'}{2^2} + \frac{w_1}{2^2} + \frac{w_2}{2},$$

$$T_3 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{w_3}{2} = \frac{W'}{2^3} + \frac{w_1}{2^3} + \frac{w_2}{2^2} + \frac{w_3}{2},$$

और 
$$P = T_4 = \frac{1}{2}T_3 + \frac{w_4}{2} = \frac{W'}{2^4} + \frac{w_1}{2^4} + \frac{w_2}{2^3} + \frac{w_3}{2^2} + \frac{w_4}{2}.$$

इसी प्रकार यदि  $n$  घिरनियाँ हों तो

$$P = \frac{W'}{2^n} + \frac{w_1}{2^n} + \frac{w_2}{2^{n-1}} + \dots + \frac{w_n}{2}.$$

$$\therefore 2^n P = W' + w_1 + 2w_2 + 2^2 w_3 + \dots + 2^{n-1} w_n.$$

यदि सब घिरनियाँ बराबर हों, तो

$$w_1 = w_2 = \dots = w_n = w.$$

$$\begin{aligned} \therefore 2^n P &= W' + w(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \\ &= W' + w(2^n - 1), \text{ गुणोत्तर श्रेणी को जोड़ने पर } l. \end{aligned}$$

अतः यांत्रिक लाभ,  $\frac{W'}{P}$  घिरनियों के भार पर निर्भर रहता है।

हम देखते हैं कि घिरनियों की इस श्रेणी में जितना अधिक घिरनियों का भार होगा उतना ही अधिक  $P$  भी होगा जो दिये हुये भार  $W'$  को साधेगा। घिरनियों के भार सामर्थ्य का प्रतिरोध करते हैं, इसलिये घिरनियाँ उतनी हल्की बनानी चाहियें जितना कि इष्ट शक्ति के लिये सम्भव हो।

कबी, जिससे घिरनियाँ लटकाई गई हैं, पर दबाव।

मान लें  $R$  कड़ी पर दबाव है। चूंकि  $R$  और बल, घिरनियों की श्रेणी और भार  $W'$  को सम्हालते हैं, इसलिये

$$R + P = W' + w_1 + w_2 + \dots + w_n.$$

$$\therefore R = W' + w_1 + w_2 + \dots + w_n - \frac{W' + w_1 + 2w_2 + 2^2 w_3 + \dots + 2^{n-1} w_n}{2^n}$$

$$= W' \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + w_1 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + w_2 \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$+ w_3 \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \dots + w_n \left(1 - \frac{1}{2}\right).$$

उदाहरण । यदि चार चल धिरनियाँ हों जिनके भार सबसे नीचे से आरम्भ करके 4, 5, 6, और 7 पाँड हैं, तो बताओ कि एक टन भार के पिंड को कौनसी सामर्थ्य सह्योलेगी ?

पिछली धारा के मकेतों का प्रयोग करके,

$$2T_1 = 112 + 4, \quad \therefore T_1 = 58.$$

$$2T_2 = T_1 + 5 = 63, \quad \therefore T_2 = 31\frac{1}{2}.$$

$$2T_3 = T_2 + 6 = 37\frac{1}{2}; \quad \therefore T_3 = 18\frac{3}{4}.$$

$$2P = T_3 + 7 = 25\frac{3}{4}, \quad \therefore P = 12\frac{3}{8} \text{ पाँड भार ।}$$

१४८--कर्म के सिद्धान्त की जाँच । धिरनियों के भार नगण्य मानकर,

यदि चार धिरनियाँ हों, तो  $P = \frac{1}{2^4} W$ .

यदि भार  $W$ ,  $x$  दूरी उठता है, तो यदि दूरी  $A_1 A_2$  स्थिर रहे, धिरनी  $A_2$  भी  $x$  दूरी उठेगी, परन्तु  $A_1$  को कड़ी से मिलाने वाली डोरी  $x$  छोटी हो जायेगी और डोरी का भाग  $x$ ,  $A_1$  के नीचे से फिसल जायेगा, अतः धिरनी  $A_2$ ,  $2x$  ऊँची उठ जायेगी ।

इसी प्रकार, धिरनी  $A_3$ ,  $4x$  ऊँची, और धिरनी  $A_4$ ,  $8x$  ऊँची उठ जायेगी ।

चूँकि  $A_4$ ,  $8x$  ऊँची उठती है, इसलिये इस धिरनी को कड़ी से मिलाने वाली डोरी और हम धिरनी को उस बिन्दु से जहाँ पर  $P$  लगाया गया है मिलानेवाली दोनों ही डोरियाँ  $8x$  कम हो जायेगी ।

अतः चूँकि डोरी का ढीला भाग  $A_4$  धिरनी के नीचे से फिसल जाता है, इसलिये  $P$  का प्रयोग-बिन्दु  $16x$  ऊँचा उठ जायेगा अर्थात् उस डोरी का सोलह गुना उठ जायेगा जो  $W$  का प्रयोग-बिन्दु उठता है ।

अतः वेग-निष्पत्ति (धारा १३७) = 16, इस प्रकार यह इस स्थिति में यांत्रिक लाभ है ।

और  $\frac{\text{सामर्थ्य से किया गया कर्म}}{\text{भार के विपरीत किया गया कर्म}} = \frac{P \cdot 16x}{W \cdot x}$

$$= \frac{\frac{1}{2^4} W \cdot 16x}{W \cdot x} = \frac{W \cdot x}{W \cdot x} = 1.$$

अतः सिद्धान्त की जाँच हो गई ।

यदि हम धिरनियों के भारों पर भी विचार करें, और चार धिरनियों को ले, तो

$$P = \frac{W}{2^4} + \frac{w_1}{2^4} + \frac{w_2}{2^3} + \frac{w_3}{2^2} + \frac{w_4}{2}.$$

पहले की भांति यदि  $A_1$ ,  $x$  दूरी उठनी है, तो दूसरी धिरनियाँ क्रमसे  $2x$ ,  $4x$  और  $8x$  ऊँची उठेंगी। अन. लटके हुये भार और धिरनियों के भारों पर किया गया कर्म

$$= W \cdot x + w_1 \cdot x + w_2 \cdot 2x + w_3 \cdot 4x + w_4 \cdot 8x$$

$$= 16x \left[ \frac{W}{2} + \frac{w_1}{2^4} + \frac{w_2}{2^3} + \frac{w_3}{2^2} + \frac{w_4}{2} \right]$$

$$= 16x \times P = \text{सामर्थ्य में किया गया कर्म।}$$

धिरनियों की संख्या चाहे कुछ भी क्यों न हो इसी प्रकार के प्रमाण का उसमें भी प्रयोग किया जा सकता है।

### उदाहरणमाला २३

१। निम्न प्रश्नों में चल धिरनियाँ बिना भार की हैं, उनकी संख्या  $n$  है, भार  $W$  है और सामर्थ्य  $P$  है ;

(क) यदि  $n=4$  और  $P=20$  पौं० भार, तो  $W$  मालूम करो।

(ख) यदि  $n=4$  और  $W=$  एक हंडरवेट, तो  $P$  मालूम करो।

(ग) यदि  $W=56$  पौं० भार और  $P=7$  पौं० भार, तो  $n$  मालूम करो।

२। निम्न प्रश्नों में सब चल धिरनियाँ बराबर हैं और प्रत्येक का भार  $w$  है, उनकी संख्या  $n$  है, सामर्थ्य  $P$  है और भार  $W$  है ;

(क) यदि  $n=4$ ,  $w=1$  पौं० भार, और  $W=97$  पौं० भार, तो  $P$  मालूम करो।

(ख) यदि  $n=3$ ,  $w=1\frac{1}{2}$  पौं० भार, और  $P=7$  पौं० भार, तो  $W$  मालूम करो।

(ग) यदि  $n=5$ ,  $W=775$  पौ० भार, और  $P=31$  पौ० भार, तो  $w$  मालूम करो ।

(घ) यदि  $W=107$  पौ० भार,  $P=2$  पौ० भार, और  $w=\frac{1}{2}$  पौ० भार, तो  $n$  मालूम करो ।

३। घिरनियों की प्रथम श्रेणी में यदि 4 घिरनियाँ हैं, और हर एक घिरनी का भार 2 पौ० है, तो बताओ 20 पौ० भार का सामर्थ्य कितना भार उठा सकता है ?

४। यदि 3 चल घिरनियाँ हैं, जिनके भार मबमे नीचे से आरम्भ करके क्रम से 9, 2, और 1 पौ० हैं, तो बताओ कौनसा बल 69 पौ० भार को सम्हालेगा ?

५। यदि 4 चल घिरनियाँ हैं, जिनके भार सबसे नीचे से आरम्भ करके क्रम से 4, 3, 2, और 1 पौ० हैं, तो बताओ कौनसा बल 54 पौ० भार को सम्हालेगा ?

६। यदि 4 चल घिरनियाँ हैं, जिनमें से प्रत्येक का भार  $w$  है और सामर्थ्य  $P$  है, तो सिद्ध करो कि कड़ी पर दबाव  $15P-11w$  होगा ।

७। यदि 3 चल घिरनियाँ हैं और उनके भार सबसे नीचे से आरम्भ करके क्रम से 4, 2, और 1 पौ० हैं, तो बताओ 28 पौ० के भार को सम्हालने के लिये कितना बल लगाना पड़ेगा ?

८। यह मान कर कि घिरनियाँ बिना भार की हैं, सिद्ध करो कि यांत्रिक लाभ वास्तविक लाभ से अधिक हो जाता है ।

९। घिरनियों की उस श्रेणी में जिसमें हर एक घिरनी पृथक् पृथक् डोरी से लटकती है, यदि घिरनियाँ 3 हों तो एक भार 7 पौ० भार के सामर्थ्य से सम्हाला जा सकता है, परन्तु यदि घिरनियाँ 4 हों तो वही भार 4 पौ० भार के सामर्थ्य में सम्हाला जा सकता है । सम्हाले हुये भार और घिरनियों के भार, जो सब बराबर हैं, मालूम करो ।

१०। घिरनियों की एक श्रेणी में 4 घिरनियाँ हैं और हर एक पृथक् डोरी से लटकी हैं । डोरियों के एक एक सिरे ऊपर के गुटके से बंधे

हुये हैं और सब स्वतंत्र मिरे ऊर्ध्वाधर हैं। यदि मध्यमे नीचे में आरम्भ करके घिरनियों के भार  $w, 2w, 3w$ , और  $4w$  है, तो वह सामर्थ्य मालूम करो जो  $15w$  के भार को सम्हाल सकता है, और उस एकमात्र बल का परिमाण भी मालूम करो जो उम कड़ी को सम्हाल सके जिसमें डोरियों के दूसरे मिरे बंधे हुये हैं।

११। चार भारी घिरनियों की श्रेणी में, यदि  $P$  सामर्थ्य और  $1/4$  भार है, तो सिद्ध करो कि कड़ी पर दबाव  $\frac{1}{2} \frac{5}{8} 1/4$  और  $15P$  के बीच में है।

१२। एक आदमी, जिसका भार 12 स्टोन है, 4 भार हीन घिरनियों की श्रेणी में मध्यमे नीचे की घिरनी से लटका हुआ है। श्रेणी की प्रत्येक घिरनी पृथक् पृथक् डोरी से लटकी हुई है। आदमी अपने आप को उस डोरी के सिरे को खींच कर सम्हाले हुए है जो एक नियत घिरनी के ऊपर से जाती है। इस डोरी पर उसके विचाव का परिमाण मालूम करो।

१३। एक आदमी, जिसका भार 156 पौ० है, 4 घिरनियों की श्रेणी में सबसे नीचे की घिरनी से लटका हुआ है। हर एक घिरनी का भार 10 पौ० है। वह अपने आप को उस डोरी के सिरे को खींच कर सम्हाले हुये है जो एक नियत घिरनी के ऊपर से जाती है। सब डोरियों को ऊर्ध्वाधर मान कर वह बल मालूम करो जो वह इस डोरी पर लगाता है।

१४९—घिरनियों की द्वितीय श्रेणी। इस में एक ही डोरी सब घिरनियों के चारों ओर जाती है। सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

इस श्रेणी में दो गुटके होते हैं जिनमें से हर एक में घिरनियाँ होती हैं। ऊपर का गुटका नियत और नीचे का चल होता है। एक ही डोरी सब घिरनियों के चारों ओर जाती है जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है।

यदि ऊपर तथा नीचे के गुटके में घिरनियों की संख्या वही है (चित्र १), तो डोरी का एक सिरा ऊपर के गुटके से बाँधा जाता है। यदि

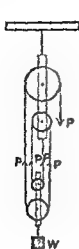


Fig. 1.

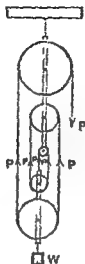


Fig. 2.

ऊपर के गुटके में घिरनियों की संख्या नीचे के गुटके में एक अधिक हो (चित्र २), तो डोरी का एक सिरा नीचे के गुटके में बाँधा जाता है।

पहली स्थिति में गुटकों की मिलाने वाली डोरी के भागों की संख्या सम और दूसरी स्थिति में विषम होती है।

दोनों स्थितियों में मान लो नीचे के गुटके में डोरी के भागों की संख्या  $n$  है। चूँकि एक ही डोरी बिकनी घिरनियों के ऊपर से जाती है अतः हर एक भाग का तनाव  $P$  है, इसलिये नीचे के गुटके पर ऊपर की ओर पूरा बल  $n.P$  है।

मान लो उठाया गया भार  $W$  है, और नीचे के गुटके का भार  $w$  है।

अतः  $W + w = nP$ , जिनसे इष्ट सम्बन्ध ज्ञात हो जायगा।

व्यवहार में दोनों गुटकों की घिरनियाँ प्रायः एक दूसरे के समानान्तर होती हैं, इस प्रकार डोरियाँ गणित के विचार में समानान्तर नहीं होनी हैं ;



परन्तु वे लगभग समानान्तर ही होती हैं, इसलिये उक्त सम्बन्ध लगभग सही रहता है ।

### सदाहरणमाला २४

१। यदि 5 पौ० का एक भार 24 पौ० के भार को सम्हालता है, तो नीचे के गुटके का भार मालूम करो जब दोनों गुटकों में तीन तीन धिरनियाँ हैं ।

\* २। यदि डोरी के सिरे पर क्रमसे 5 और 6 पौ० के लगाये गये भार नीचे के गुटके पर 18 और 22 पौ० के भार सम्हालते हो, तो डोरियों की मस्या और नीचे के गुटके का भार मालूम करो ।

- ३। यदि क्रमसे 4 और 5 पौ० के भार 5 और 18 पौ० के भारों को सम्हालते हैं तो बताओ नीचे के गुटके का क्या भार है और उसमें कितनी धिरनियाँ हैं ?

४। यदि 6 पौ० का भार 28 पौ० के भार को सम्हालता है और 8 पौ० का भार 42 पौ० के भार को सम्हालता है, तो डोरियों की मस्या और नीचे के गुटके का भार मालूम करो ।

\* ५। धिरनियों की द्वितीय श्रेणी में यदि नीचे के गुटके में एक डोरी लट-काई जाय और टोकरी में बैठा हुआ एक आदमी अपने को और टोकरी को रस्मी के स्वतंत्र सिरे को खींच कर सम्हालता हो, तो डोरी के ऊर्ध्वाधर से भुकाव की उपेक्षा करके और आदमी और टोकरी के भार को  $W$  मान कर, बताओ कि वह रस्मी पर कितना तनाव लगा रहा है ।

यदि रस्मी का स्वतंत्र सिरा भूमि पर लगी हुई एक धिरनी के चारों ओर जाता हो और तब आदमी उसे खींचता हो, तो बताओ वह कितना बल लगाता है ।

६। एक आदमी जिसका भार 12 स्टोन है, 3 हन्डरबैट भार को धिरनियों की उस श्रेणी द्वारा उठा रहा है जिसमें एक ही रस्मी सब धिरनियों

के चारों ओर जाती है और दोनों गुटकों में चार चार घिरनियाँ हैं तथा रस्मी ऊपर के गुटके से बँधी हुई है। घिरनियों के भारों की उपेक्षा करके, बताओ भूमि पर उमका क्या दबाव होगा यदि वह ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर खींचता हो ?

७। हमें बताया गया है कि वह रस्मा, जिससे "ब्रेट पाल" जिसका भार 18 टन है, अपने स्थान पर गिरजे की मीनार के रूप में उठाया गया था, घिरनियों के दोनों गुटकों पर होकर चार बार गुजरा था। इस वाक्य से घिरनियों का वर्णन करो और रस्मे की दक्षिण का अनुमान करो।

८। घिरनियों की इस श्रेणी में कर्म के मिद्वान्त को सिद्ध करो और वेग-निष्पत्ति मालूम करो।

९। एक साधारण 'ब्लॉक ऐंड टैंकिल' में दो घिरनियाँ नीचे के और दो ऊपर के गुटके में हैं। बताओ 300 पौं० के भार को उठाने में किस बल का प्रयोग करना पड़ेगा ? यदि घर्षण के कारण कोई दिया हुआ बल उस भार का केवल 45 गुना उठा सके जो वह उस समय उठाता जब घिरनियाँ घर्षणहीन होनी, तो इष्ट बल मालूम करो।

• १०। एक 'ब्लॉक ऐंड टैंकिल' में वेग-निष्पत्ति 8:1 है। घर्षण इतना है कि लगाये हुये बल का केवल 55% कार्य में आता है। बताओ इसके प्रयोग में किन्ता बल 5 हण्डरवेट भार को उठायेगा।

१५०—घिरनियों की तृतीय श्रेणी। इसमें सब डोरियाँ भार से लगी होती हैं। सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

इस श्रेणी में किसी भी घिरनी के ऊपर से जाती हुई डोरी का एक सिरा एक दंड से बँधा होता है, जिससे भार लटकाया जाता है, और डोरी का दूसरा सिरा अगली नीचे की घिरनी में लगा होता है। सब से नीचे की घिरनी के ऊपर से जाती हुई डोरी का एक सिरा दंड से बँधा होता है और उसके दूसरे सिरे पर सामर्थ्य लगाया जाता है। इस श्रेणी में सबसे ऊपर की घिरनी नियत होती है।

मान लो सबसे नीचे से आरम्भ करके  $A_1, A_2, A_3, \dots$  चल घिरनियाँ हैं और मान लो इनके ऊपर होकर जाती हुई डोरियों के तनाव  $T_1, T_2, T_3, \dots$  हैं।

यदि सामर्थ्य  $P$  है, तो स्पष्टतः  $T_1 = P$ .

(१) मान लो घिरनियों के भार उपेक्षणीय हैं।

चूँकि घिरनियाँ समतुलित हैं, इसलिये सबसे नीचे से आरम्भ करके क्रम से

$$T_2 = 2T_1 = 2P,$$

$$T_3 = 2T_2 = 2^2P,$$

और  $T_4 = 2T_3 = 2^3P.$

और चूँकि दंड जिससे  $IV$  लटकाया गया है, समतुलित है, इसलिये

$$IV = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = P + 2P + 2^2P + 2^3P$$

$$= P \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = P(2^4 - 1) \quad \dots \quad (१).$$

यदि घिरनियों की संख्या  $n$  है, जिनमें से  $(n-1)$  चल हैं, तो इसी प्रकार  $IV = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$

$$= P + 2P + 2^2P + \dots + 2^{n-1}P$$

$$= P \left[ \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right], \text{ गूणोत्तर श्रेणी को जोड़कर,}$$

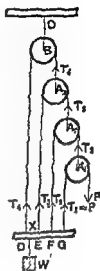
$$= P(2^n - 1) \quad \dots \quad (2).$$

अतः यांत्रिक लाभ  $2^n - 1$  है।

(२) मान लो सबसे नीचे से आरम्भ करके चल घिरनियों के भार  $w_1, w_2, \dots$  हैं।

चूँकि घिरनियाँ समतुलित हैं, इसलिये क्रम से

$$T_2 = 2T_1 + w_1 = 2P + w_1,$$



$$T_3 = 2T_2 + w_2 = 2^3P + 2w_1 + w_2$$

$$T_4 = 2T_3 + w_3 = 2^3P + 2^2w_1 + 2w_2 + w_3$$

और चूँकि दंड समतुलित है, इसलिये

$$W = T_4 + T_3 + T_2 + T_1,$$

$$= (2^3 + 2^2 + 2 + 1)P + (2^2 + 2 + 1)w_1 + (2 + 1)w_2 + w_3$$

$$= \frac{2^4 - 1}{2 - 1} P + \frac{2^3 - 1}{2 - 1} w_1 + \frac{2^2 - 1}{2 - 1} w_2 + w_3$$

$$= (2^4 - 1)P + (2^3 - 1)w_1 + (2^2 - 1)w_2 + w_3 \quad \dots (३).$$

यदि घिरनियों की संख्या  $n$  है, जिनमें से  $(n-1)$  बल है तो इसी प्रकार

$$W = T_n + T_{n-1} + \dots + T_2 + T_1$$

$$= (2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1) P + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1)w_1$$

$$+ (2^{n-3} + 2^{n-4} + \dots + 1)w_2 + \dots + (2 + 1)w_{n-2} + w_{n-1}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} P + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} w_1 + \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} w_2 + \dots + \frac{2^2 - 1}{2 - 1} w_{n-2} + w_{n-1}$$

$$= (2^n - 1)P + (2^{n-1} - 1)w_1 + (2^{n-2} - 1)w_2 + \dots + (2^2 - 1)w_{n-2} + (2 - 1)w_{n-1} \quad \dots (४).$$

यदि सब घिरनियाँ बराबर हैं, तो

$$w_1 = w_2 = \dots = w_{n-1} = w,$$

इसलिये सम्बन्ध (४) निम्न रूप में आ जाता है :—

$$W = (2^n - 1)P + w[2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 - (n-1)]$$

$$= (2^n - 1)P + w[2^n - n - 1], \text{ गुणोत्तर श्रेणी को जोड़ कर ।}$$

समझाने वाली कड़ी पर दबाव । यह दबाव, सामर्थ्य, भार और घिरनियों के भार में समतुलित होता है, इसलिये यह  $P + W + w_1 + w_2 + \dots + w_n$  के बराबर है जो जानानी में जात हो जाता है ।

उदाहरण । यदि ४ घिरनियाँ हों, जिनके भार सबसे नीचे से आगम करके क्रम से ४, ५, ६, और ७ पौ० हो, तो बताओ एक हन्डरेड भार के पिंड को कितना सामर्थ्य समझाएगा ?

विछली धारा के मंकेतो का प्रयोग करके

$$T_1 = 2P + 4,$$

$$T_2 = 2T_1 + 5 = 4P + 13,$$

$$T_3 = 2T_2 + 6 = 8P + 32.$$

और  $112 = T_1 + T_2 + T_3 + P = 15P + 49.$

$$\therefore P = \frac{63}{15} = 4\frac{1}{5} \text{ पौ० भार ।}$$

१५१—इस श्रेणी में हम देखते हैं प्रत्येक धिरनी का जितना अधिक भार होता है उतना ही कम किमी दिये हुये भार  $W$  को सम्हालने के लिये  $P$  की आवश्यकता होगी है। अतः धिरनियों का भार सामर्थ्य की सहायता करता है। यदि धिरनियों के उचित भार रखे जाय तो बिना किसी सामर्थ्य के लगाये हुये भी श्रेणी समतुलित रह सकती है।

उदाहरणार्थ, मान लो तीन चल धिरनियाँ हैं, जिनमें से प्रत्येक का भार  $w$  है तो विछली धारा के सम्बन्ध (३) से

$$W = 15P + 11w.$$

अतः यदि  $11w = 11'$ , तो  $P$  शून्य हो जाता है, इसलिये समतुलित अवस्था रखने के लिये डोरी के स्वतंत्र निरे पर किसी भी सामर्थ्य की आवश्यकता नहीं पड़ेगी।

१५२—धिरनियों की तृतीय श्रेणी में, भार  $w$  का सम्हालने वाला दंड क्षैतिज नहीं रह सकता जबतक कि वह बिन्दु जिम पर भार लटकाया जाता है ठीक मे न चुना जाय। किसी विशेष स्थिति में यह बिन्दु आपानी से मालूम किया जा सकता है।

धारा १५० के चित्र में मान लो तीन चल धिरनियाँ हैं जिनके भार उपेक्षणीय हैं। मान लो  $D, E, F$  और  $G$  बिन्दुओं के बीच की सभी दूरियाँ क्रम से  $a$  हैं, और मान लो वह बिन्दु जिमपर भार लटकाया गया है  $X$  है।

इसलिये  $T_1, T_2, T_3$  और  $T_4$  का परिणामीयल  $X$  में जायगा।

100

इसलिये घिरनियों के भारों की उपेक्षा करके  $P$  द्वारा किया गया कर्म  $= 15x$ .  $P = x(2^1 - 1)P = x$ .  $W$ , धारा १५० के समीकरण (१) से,  $=$  भार  $II'$  पर किया गया कर्म ।

यदि घिरनियों के भारों पर भी विचार करें, तो सामर्थ्य और घिरनियों के भारों द्वारा (जो इस स्थिति में सामर्थ्य की सहायता करते हैं) किया गया कर्म

$$= P.15x + w_1.7x + w_2.3x + w_3.x$$

$$= x[P(2^1 - 1) + w_1(2^2 - 1) + w_2(2^3 - 1) + w_3]$$

$$= x.II', \text{ धारा १५० के समीकरण (३) से,}$$

$$= \text{भार } II' \text{ पर किया गया कर्म ।}$$

यदि घिरनियों की संख्या  $n$  है तो इसी प्रकार मालूम कर सकते हैं कि  $P$  का प्रयोग-बिन्दु उस दूरी का  $(2^n - 1)$  गुना हट जायगा जो  $II'$  हटता है, इसलिये वेग-निष्पत्ति  $2^n - 1$  होगी ।

### उदाहरणमाला २५

१। निम्न प्रश्नों में घिरनियों के भार उपेक्षणीय हैं, उनकी संख्या  $n$  है,  $P$  सामर्थ्य या 'शक्ति' है और  $II'$  भार है,

(क) यदि  $n=4$  और  $P=2$  पौ० भार, तो  $II'$  मालूम करो ।

(ख) यदि  $n=5$  और  $II'=124$  पौ० भार, तो  $P$  मालूम करो ।

(ग) यदि  $II'=105$  पौ० और  $P=7$  पौ० भार, तो  $n$  मालूम करो ।

२। निम्न प्रश्नों में सब घिरनियाँ बराबर हैं, और हर एक का भार  $w$  है,  $P$  सामर्थ्य है और  $II'$  भार है,

(क) यदि  $n=4$ ,  $w=1$  पौ० भार, और  $P=10$  पौ० भार, तो  $II'$  मालूम करो ।

(ख) यदि  $n=3$ ,  $w=\frac{1}{2}$  पौ० भार, और  $II'=114$  पौ० भार, तो  $P$  मालूम करो ।

(ग) यदि  $n=5$ ,  $P=3$  पौ० भार, और  $II'=106$  पौ० भार, तो  $w$  मालूम करो ।

(घ) यदि  $P=4$  पौ० भार,  $W=137$  पौ० भार, और  $w=\frac{1}{2}$  पौ० भार, तो  $n$  मालूम करो ।

३। यदि धिरनियों की संख्या 5 है, और हर एक का भार 1 पौ० है, तो बताओ ॥ हण्डरवेट को सम्हालने के लिये कितना सामर्थ्य लगेगा ?

यदि धिरनियाँ आकार में बराबर हों, तो बताओ छड़ के किस बिन्दु से भार लटकाया जाय कि वह क्षैतिज रहे ?

४। यदि 4 बिना भार की धिरनियों के ऊपर से जाती हुई डोरियाँ बिना भार के एक दंड से एक एक इंच की दूरी पर बँधी हों, तो बताओ दंड के किस बिन्दु से भार लटकाया जाय कि वह क्षैतिज रहे ?

५। यांत्रिक लाभ मालूम करो जबकि धिरनियों की संख्या 4 है, और प्रत्येक का भार लटके हुये भार का  $\frac{1}{8}$  है ।

६। 3 बिना भार की धिरनियों की श्रेणी में, जिसमें हर एक डोरी उस दंड से बँधी हुई है जिससे भार लटका हुआ है, यदि हर एक धिरनी का ग्यास 2 इंच है, तो बताओ दंड के किस बिन्दु से भार लटकाया जाय कि वह क्षैतिज रहे ?

७। यदि सब धिरनियाँ बराबर हैं और सामर्थ्य धिरनियों में से किसी एक के भार के बराबर है और धिरनियों की संख्या 5 है, तो सिद्ध करो कि भार सामर्थ्य का 57 गुना है ।

८। 3 धिरनियों की तृतीय श्रेणी में यदि सब धिरनियों के भार बराबर हैं, तो समतुलित अवस्था में सामर्थ्य का भार के साथ सम्बन्ध मालूम करो । यदि हर एक धिरनी का भार 2 औंस है, तो बताओ केवल धिरनियों द्वारा कितना भार सम्हाला जा सकता है ?

यदि सम्हाला गया भार 25 पौ० और सामर्थ्य 3 पौ० भार हो, तो बताओ हर एक धिरनी का भार क्या है ?

९। बिना भार की धिरनियों की तृतीय श्रेणी में भार 70 पौ० सामर्थ्य से सम्हाला जाता है । वह आँकड़ा जिससे कोई एक डोरी भार से बँधी हुई है टूट जाता है और डोरी तब उस धिरनी से बाँध दी जाती



है जिसके ऊपर से बह जा रही थी, और जब भार को सन्हालने के लिये 150 पौ० के सामर्थ्य की आवश्यकता होती है। धिरनियों की संख्या और सन्हाला गया भार मालूम करो।

१०। बिना भार की धिरनियों की तृतीय श्रेणी में, यदि अन्तिम धिरनी के ऊपर से जानी हुई डोरी भार से बांध दी जाय, तो सिद्ध करो कि डोरी का तनाव उस निष्पत्ति में घट जाता है जो धिरनियों की संख्या पर निर्भर रहनी है।

यदि तनाव 16·15 की निष्पत्ति में घट जाता हो, तो धिरनियों की संख्या मालूम करो।

११। धिरनियों की उभ श्रेणी में जिसमें प्रत्येक डोरी भार से बंधी हुई है, यदि हर एक धिरनी का भार  $w$  है, और धिरनियों के भार का योग  $W'$  है, और  $P$  और  $IV$  क्रम में सामर्थ्य और भार है, तो सिद्ध करो कि उनी श्रेणी में  $P \propto w$  सामर्थ्य  $IV + IV'$  भार को सन्हालेगा यदि धिरनियाँ बिना भार की हों।

१२। यदि भारहीन धिरनियों की संख्या  $n$  है और एक डोरी में, जिसके सिरे  $P$  और  $IV$  भार से बंधे हुये हैं, एक धिरनी फँसा हो जिसमें एक भार  $IV'$  लटका हो, तो  $P$ ,  $IV$  और  $IV'$  के बीच का सम्बन्ध मालूम करो।

१३। यदि धिरनियों की संख्या  $n$  है, हर एक का व्यास  $2a$  है और भार अवक्षणीय है, तो सिद्ध करो कि भार के प्रयोग-बिन्दु की सामर्थ्य की क्रिया-रेखा से दूरी  $\frac{2^n}{2^n - 1} na$  होगी।

### (ग) ज्ञानत घरातल

१५५—ज्ञानत घरातल, यांत्रिक शक्ति के बिचार से वह दृढ़ घरातल है जो क्षैतिज से किसी कोण पर झुका होता है।

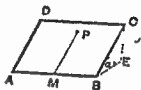
इससे भारी पिंडों के उठाने में सहायता मिलती है।

इस अध्याय में हम केवल घरातल पर रखे हुये उभ धिड़ की स्थिति

पर विचार करेंगे जिसपर आनत और क्षैतिज धरातलों के छेदन में होकर अर्थात् महत्तमढाल-रेखा से खींचे गये लम्ब धरातल में बल कार्य करते हैं।

विद्यार्थी किसी आनत तल पर महत्तमढाल-रेखा का चित्र अपने सामने निम्न प्रकार खींच सकता है :—काँट

बोर्ड का एक आयताकार टुकड़ा  $ABCD$  लो, और उसे क्षैतिज से कोई कोण बनाते हुये इस प्रकार रखो कि रेखा  $AB$  क्षैतिज मेज को स्पर्श करे। बोर्ड पर कोई बिन्दु  $P$  लो और  $AB$  पर



$PM$  लम्ब खींचो।  $P$  से होकर खींची गई महत्तमढाल की रेखा  $PM$  है।

$C$  से  $AB$  में होकर खींचे गये क्षैतिज धरातल पर  $CE$  लम्ब खींचो, और  $BE$  को मिला दो। रेखायें  $BC$ ,  $BE$  और  $CE$  क्रम से आनत धरातल की लम्बाई, आधार और ऊँचाई कहलाती हैं और कोण  $CBE$  धरातल का क्षैतिज से झुकाव है।

इस अध्याय में आनत धरातल को चिकना मान लिया गया है, अतः धरातल और पिंड के बीच का प्रतिबल आनत धरातल पर लम्ब है।

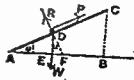
क्योंकि धरातल दृढ़ है, इसलिये समतुलित अवस्था के लिये इस पर आवश्यकता के अनुसार कितना भी अधिक प्रतिबल हो सकता है।

१५६—दिये हुये भार का एक पिंड एक आनत धरातल पर रखा हुआ है; सामर्थ्य, भार और धरातल पर प्रतिबल के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

मान लो पिंड का भार  $W$ ,  $P$  सामर्थ्य और  $R$  धरातल पर प्रतिबल है; और मान लो धरातल का क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है।

पहली स्थिति। मान लो सामर्थ्य धरातल पर महत्तमढाल-रेखा पर ऊपर की ओर कार्य करता है।

मान लो  $AC$  आनत धरातल है,  $A$  से खींची गई क्षैतिज रेखा  $AB$ ,  $DE$  ऊर्ध्वाधर रेखा है, और मान लो  $D$  से खींचा गया धरातल पर लम्ब  $AB$  को  $F$  पर मिलता है।



$$\therefore \angle FDE = 90^\circ - \angle ADE = \angle DAE = \alpha.$$

क्योंकि पिंड पर केवल तीन बल कार्य करते हैं, इसलिये लामो के प्रमेय में (धारा ८०), हर एक बल शेष दो बलों के बीच के कोणों की ज्याओं के अनुपात में होगा।

$$\therefore \frac{P}{\text{ज्या } (R, W)} = \frac{R}{\text{ज्या } (W, P)} = \frac{W}{\text{ज्या } (P, R)},$$

अर्थात् 
$$\frac{P}{\text{ज्या } (180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\text{ज्या } (90^\circ + \alpha)} = \frac{W}{\text{ज्या } 90^\circ},$$

अर्थात् 
$$\frac{P}{\text{ज्या } \alpha} = \frac{R}{\text{कोज्या } \alpha} = W \quad \dots \quad (१).$$

$$\therefore P = W \text{ ज्या } \alpha, \text{ और } R = W \text{ कोज्या } \alpha.$$

सम्यग्ध (१) इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$P : R : W$$

:: घरातल की ऊँचाई : घरातल का आधार : घरातल की लम्बाई।

अन्वया :  $W$  को घरातल और उसकी लम्ब दिशा में विदिलिष्ट किया, तो उसके अवयव भाग  $DA$  पर  $W$  कोज्या  $ADE$  अर्थात्  $W \text{ ज्या } \alpha$  और  $DF$  पर  $W \text{ ज्या } ADE$  अर्थात्  $W \text{ कोज्या } \alpha$  है:

$$\text{अतः } P = W \text{ ज्या } \alpha \text{ और } R = W \text{ कोज्या } \alpha.$$

पिंड को  $A$  से  $C$  तक खींचने में बल  $P$  द्वारा किया गया कर्म  $P \times AC$  है।

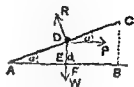
$$\text{परन्तु } P = W \text{ ज्या } \alpha.$$

$$\text{इसलिये कृत-कर्म} = W \text{ ज्या } \alpha \times AC = W \times AC \text{ ज्या } \alpha = W \times BC.$$

अतः किया गया कर्म वही है जो पिंड के भार को बिना जानत घरातल के हम्नशेष के, उनी ऊँचाई तक उठाने में किया जाता। अतः कर्म का सिद्धान्त इस स्थिति में भी सही है।

दूसरी स्थिति। मान लो सामर्थ्य चैतिज दिशा में कार्य करता है।

[ इस स्थिति में हमें यह अनुमान करना होता है कि धरातल में  $D$  पर एक छोटा छेद है जिससे डारी जाती है और पिंड से बंधी होती है, अथवा पिंड धरातल की ओर एक क्षैतिज बल में ठेका जा रहा है । ]



जैसा कि पहली स्थिति में,

$$\frac{P}{\text{ज्या } (R, W)} = \frac{R}{\text{ज्या } (W, P)} = \frac{W}{\text{ज्या } (P, R)},$$

$$\text{अर्थात् } \frac{P}{\text{ज्या } (180^\circ - a)} = \frac{R}{\text{ज्या } 90^\circ} = \frac{W}{\text{ज्या } (90^\circ + a)},$$

$$\text{अर्थात् } \frac{P}{\text{ज्या } a} = \frac{R}{1} = \frac{W}{\text{कोज्या } a} \quad \dots (1).$$

$\therefore P = W \text{ स्पज्या } a$ , और  $R = W \text{ व्युकोज्या } a$ .

सम्बन्ध (1) इस प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$P \cdot R \cdot W$$

$\therefore$  धरातल की ऊँचाई : धरातल की लम्बाई . धरातल का आधार ।

धन्यथा ।  $W$  के धरातल और उसकी लम्ब दिशा में अवयव भाग  $W \text{ ज्या } a$  और  $W \text{ कोज्या } a$  हैं ; इसी प्रकार  $P$  के अवयव भाग  $P \text{ कोज्या } a$  और  $P \text{ ज्या } a$  हैं ।

$$\therefore P \text{ कोज्या } a = W \text{ ज्या } a,$$

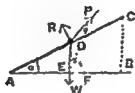
$$\begin{aligned} \text{और } R &= P \text{ ज्या } a + W \text{ कोज्या } a = W \left[ \frac{\text{ज्या}^2 a}{\text{कोज्या } a} + \text{कोज्या } a \right] \\ &= W \frac{\text{ज्या}^2 a + \text{कोज्या}^2 a}{\text{कोज्या } a} = W \text{ व्युकोज्या } a. \end{aligned}$$

$\therefore P = W \text{ स्पज्या } a$ , और  $R = W \text{ व्युकोज्या } a$ .

तीसरी स्थिति । मान लो सामंजस्य आनत धरातल से  $\theta$  कोण पर कार्य करना है ।

आमो के प्रमेय से

$$\frac{P}{\text{ज्या } (R, W)} = \frac{R}{\text{ज्या } (W, P)} = \frac{W}{\text{ज्या } (P, R)},$$



अर्थात्  $\frac{P}{\text{ज्या } (180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\text{ज्या } (90^\circ + \theta + \alpha)} = \frac{W}{\text{ज्या } (90^\circ - \theta)},$

अर्थात्  $\frac{P}{\text{ज्या } \alpha} = \frac{R}{\text{कोज्या } (\theta + \alpha)} = \frac{W}{\text{कोज्या } \theta}.$

$$\therefore P = W \frac{\text{ज्या } \alpha}{\text{कोज्या } \theta}, \text{ और } R = W \frac{\text{कोज्या } (\theta + \alpha)}{\text{कोज्या } \theta}.$$

अन्यथा : घरातल और उसकी लम्ब दिशा में बलों को विरलिट करके,  
 $P \text{ कोज्या } \theta = W \text{ ज्या } \alpha$ , और  $R + P \text{ ज्या } \theta = W \text{ कोज्या } \alpha$ .

$$\therefore P = W \frac{\text{ज्या } \alpha}{\text{कोज्या } \theta},$$

$$\begin{aligned} \text{और } R &= W \text{ कोज्या } \alpha - P \text{ ज्या } \theta = W \left[ \text{कोज्या } \alpha - \frac{\text{ज्या } \alpha \text{ ज्या } \theta}{\text{कोज्या } \theta} \right] \\ &= W \frac{\text{कोज्या } \alpha \text{ कोज्या } \theta - \text{ज्या } \alpha \text{ ज्या } \theta}{\text{कोज्या } \theta} = W \frac{\text{कोज्या } (\alpha + \theta)}{\text{कोज्या } \theta}. \end{aligned}$$

यदि E से हम EK, P के समानान्तर खींचें जो DF को K पर मिले, तो DEK बल-त्रिभुज होगा, इसलिये

$$P : R : W :: EK : KD : DE.$$

इस प्रकार P और R की आलेख्य-रचना मालूम हो जाती है।

हम देखते हैं कि तीसरी स्थिति में पहली और दूसरी दोनों स्थितियाँ

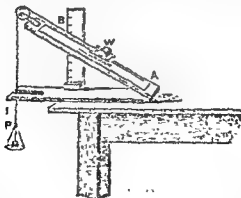
सम्मिलित है। यदि हम  $\theta$  को शून्य के बराबर रखें तो पहली स्थिति निकल आती है, और यदि  $\theta$  को  $(-\alpha)$  के बराबर रखें तो दूसरी स्थिति निकल आती है।

**कर्म के सिद्धान्त की जाँच।** तीसरी स्थिति में मान लो पिंड घरातल पर  $x$  दूरी हटता है, तो वह दूरी जो  $P$  का प्रयोग-बिन्दु प्रयोग-दिशा की ओर हटेगा  $x$  कोज्या  $\theta$  होगी; और ऊर्ध्वाधर दूरी जो भार हटेगा  $x$  ज्या  $\alpha$  होगी।

अतः सामर्थ्य द्वारा किया गया कर्म  $P \cdot x$  कोज्या  $\theta$  है और भार के विपरीत किया गया कर्म  $W \cdot x$  ज्या  $\alpha$  है। यह ऊपर के सिद्ध किये गये सम्बन्ध के अनुसार बराबर हैं।

१५७—प्रयोग। आनत घरातल पर प्रयोग द्वारा सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

लकड़ी का एक बोर्ड  $AB$  लो जो मेज में कसे हुये एक दूसरे बोर्ड से  $A$  पर फर्श द्वारा लगा हुआ है। मान लो  $AB$  बोर्ड पर घर्षण को कम करने के लिये शीशे की चादर लगी हुई है।  $B$  पर एक नियत ऊर्ध्वाधर अशांकित मापनी लगी हुई है, जिसमें  $B$  की  $A$  से ऊँचाई आसानी से पढ़ी जा सके।



भार में एक भारी पीतल का रोलर (बेयन) होना है जिसमें एक छोरी बँधी होती है जो एक घिरनी आकर एक पन्हे की धामनी

है जिसमें भार रखे जा सकते हैं। यह भार पलड़े के भार को मिला कर सामर्थ्य  $P$  का काम देते हैं।

धिरनी को इस प्रकार लगाते हैं कि उसके और  $W$  के बीच की डोरी घरातल के समानान्तर रहती है।

भुजा  $AB$  को किसी उपयुक्त कोण पर लगा दो; पलड़े में इस प्रकार भार रखो कि  $W$  ठीक ठीक सम्भल जाय। [व्यवहार में यह अच्छा होगा यदि  $P$  की जगह उन भारों के मानों का औसत लें जो  $W$  को क्रमसे ठीक नीचे की ओर जाने देगा और ठीक ऊपर की ओर खींच लेगा।]

$B$  की  $A$  से ऊँचाई  $h$  और  $AB$  की लम्बाई  $l$  ध्यान से देखो, तो मालूम होगा कि  $\frac{P}{W} = \frac{h}{l}$ ।

अब बोर्ड को किसी दूसरे कोण पर लगा दो और फिर  $P, h, l$  मालूम करो। यहो सम्बन्ध फिर भी सही निकलेगा।

यदि बोर्ड की लम्बाई में एक चीर हो जिसमें डोरी जा सके, तो धिरनी को ऐसे स्थान पर लगाया जा सकता है कि डोरी क्षैतिज रहे। इस स्थिति में जैसा कि धारा १५६ की दूसरी स्थिति में है, सामर्थ्य क्षैतिज होगा और

$$\frac{P}{W} = \frac{\text{धरातल की ऊँचाई}}{\text{धरातल का आधार}}$$

१५८—यदि सामर्थ्य महत्तमदाल-रेखा से गीचे गये ऊर्ध्वपर घरातल में प्रयोग न करे तो चिकने आनत घरातल पर समतुलित अवस्था नहीं हो सकती है। इस स्थिति में समतुलित अवस्था तब हो सकती है जब आनत घरातल रुध हो। हम इस स्थिति पर अगले अध्याय में विचार करेंगे।

### उदाहरणमाला २६

१। कौनसा बल क्षैतिज दिशा में कार्य करता हुआ 16 पौं० के भार को एक चिकने घरातल पर समतुलित अवस्था में रक सकता है,

जब धरातल की ऊँचाई ३ फुट और उसके आधार की लम्बाई ४ फुट है, और बताओं, धरातल पर प्रतिबल क्या होगा ?

२। एक पिंड एक आनत धरातल पर रखा हुआ अपने भार के आधे बल से जो धरातल के ऊपर की ओर कार्य करता है रखा हुआ है। धरातल का झुकाव क्षैतिज से और उसका प्रतिबल मालूम करो।

३। एक रस्सी, जिसका ऊर्ध्वाधर से झुकाव  $30^\circ$  है, इतनी मजबूत है कि वह एक चिकने धरातल पर जिसका क्षैतिज से झुकाव  $30^\circ$  है,  $180^\circ$  पौ० के भार को ठीक समझाल सकती है। वह लगभग अधिक से अधिक तनाव मालूम करो जो रस्सी पर लगाया जा सकता है।

४। एक पिंड एक धरातल पर रखा हुआ है जिसका क्षैतिज से झुकाव  $60^\circ$  है, और उसे एक बल रोके हुये है जो क्षैतिज से  $30^\circ$  का कोण बनाता है ; सिद्ध करो कि बल और धरातल का प्रतिबल दोनों पिंड के भार के बराबर हैं।

५। एक पिंड जिसका भार  $2P$  है एक आनत धरातल पर एक क्षैतिज बल  $P$  से और एक दूमरे बल  $P$  से जो धरातल के समानान्तर कार्य करता है समन्वित अवस्था में रखा हुआ है। धरातल के आधार की उसकी ऊँचाई से निष्पत्ति मालूम करो और धरातल का प्रतिबल भी मालूम करो।

६। एक पिंड एक आनत धरातल पर, जो क्षैतिज से  $30^\circ$  के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ है। उसे एक बल रोके हुये है जो धरातल से  $30^\circ$  का कोण बनाता है, पिंड के भार की बल से निष्पत्ति मालूम करो।

७। एक भार आनत धरातल पर एक बल से रोका गया है जो धरातल से कोई कोण बनाता है ; यदि भार, बल, और प्रतिबल ४:३:२ के अनुपात में हों तो धरातल का झुकाव और बल की दिशा मालूम करो।

८। एक पिंड जिसका भार ५ पौ० है एक चिकने आनत धरातल पर जो क्षैतिज से  $30^\circ$  का कोण बनाता है रखा हुआ है। पिंड पर दो बल कार्य करते हैं, एक २ पौ० भार के बराबर है और धरातल के समानान्तर ऊपर की







और कार्य करता है और दूसरा  $P$  के बराबर है और घरातल से  $30^\circ$  के कोण पर कार्य करता है।  $P$  का मान और घरातल का प्रतिबल मालूम करो।

९। वह बल मालूम करो जो किसी आनत घरातल में ऊपर की ओर कार्य करता हुआ 10 पौं० भार के एक पिंड को समतुलित अवस्था में रखता है, जबकि यह दिया हुआ है कि बल, घरातल का प्रतिबल और पिंड का भार समानान्तर श्रेणी में है।

१०। यदि कोई बल  $P$  एक आनत घरातल के समानान्तर कार्य करता हुआ और  $W$  भार के एक पिंड को समझालता हुआ घरातल पर प्रतिबल  $R$  उत्पन्न करता है, तो सिद्ध करो कि वह बल क्षैतिज दिशा में कार्य करता हुआ और भार  $R$  के एक पिंड को समझालता हुआ घरातल पर प्रतिबल  $W$  उत्पन्न करेगा।

११। 11 और 8 फुट लम्बे दो नस्ने इस प्रकार नियत हैं कि उनके नीचे के सिरे एक क्षैतिज घरातल पर हैं और ऊपर के सिरे एक दूसरे की स्पर्श करते हैं। इन नस्नों पर क्रम में  $W'$  और 12 पौं० भार के दो पिंड रखे हुये हैं और एक डोरी में बँधे हुये हैं जो नस्नों के उभयनिष्ठ शीर्ष से जाती है;  $W$  का मान मालूम करो।

१२। क्षैतिज से कोण  $\alpha$  बनाती हुई ट्रेम-लाइन की एक ओर कुछ लदे हुये ठेले, जिसमें में प्रत्येक पर एक टन भार लदा हुआ है, लाइन की दूसरी ओर जो क्षैतिज से कोण  $\beta$  बनाती है, सड़िया में उतने ही खाली ठेलों से रोके गये हैं। एक ठेले का भार मालूम करो।

१३। एक पिंड एक घरातल पर रखा हुआ है जो क्षैतिज से कोण  $\alpha$  बनाता है। यदि घरातल का प्रतियल लगाये हुये सामर्थ्य के बराबर है, तो सिद्ध करो कि सामर्थ्य का आनत घरातल में झुकाव  $90^\circ - 2\alpha$  है।

१४। एक भारी डोरी इस प्रकार रखी हुई है कि उसका एक भाग किसी दिये हुये आनत घरातल पर है और शेष भाग घरातल के शिखर पर लगी हुई एक छोटी सी घिरनी पर जाकर ऊर्ध्वोपर लटका हुआ है।

बताओ डोरी का कौन सा बिन्दु घिरनों के ऊपर रखा जाय कि वह समतुलित रहे ?

१५। एक ही ऊँचाई के दो आनत धरातलों पर दो भार क्रम से एक डोरी द्वारा जो धरातलों के उभयनिष्ठ शिखर से जाती है और उनके समानान्तर है, रुके हुये हैं। एक धरातल की लम्बाई उसकी ऊँचाई से दुगुनी है, और दूसरे की लम्बाई उसके आधार से दुगुनी है। सिद्ध करो कि एक धरातल का प्रतिबल दूसरे धरातल के प्रतिबल से तिगुना होगा।

१६। 50 पी० भार का एक पिंड चिकने धरातल पर जो क्षैतिज में  $20^{\circ} 20'$  के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक बल से रुका हुआ है जो धरातल पर ऊपर की ओर कार्य करता है, लेखा-चित्र द्वारा, अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके बल और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

१७। 20 पी० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर, जो क्षैतिज से  $25^{\circ}$  के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक बल द्वारा जो धरातल से  $35^{\circ}$  का कोण बनाते हुये कार्य करता है, रोक रखा है; लेखा-चित्र द्वारा अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके  $P$  और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

१८। 30 पी० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर जो क्षैतिज से  $28^{\circ} 15'$  के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक क्षैतिज बल  $P$  से रुका हुआ है; लेखा-चित्र द्वारा अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके  $P$  और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

### (घ) चक्र और धुरी

१५९—इस मशीन में एक यज्ञबूत बेलन अथवा धुरी होती है जिसके सिरों पर  $A$  और  $B$  दो चूल् होते हैं जो नियत आलम्बनों पर बेरोक घूम सकते हैं। धुरी पर दृढ़ता से एक पहिया अथवा चक्र,  $CD$  लगा होता है जिसका धरातल धुरी पर लम्ब होता है।

और कार्य करना है और दूसरा  $P$  के बराबर है और घगतल में  $30^\circ$  के कोण पर कार्य करना है।  $P$  का मान और घगतल का प्रतिबल मापूम करो।

९। यह बल मापूम करो जो किसी आनत घरातल में ऊपर की ओर कार्य करना हुआ 10 वीं भार के एक पिंड को समतुल्य अवस्था में रखा है, जबकि यह दिशा हुआ है कि बल, घगतल का प्रतिबल और पिंड का भार समानान्तर श्रेणी में है।

१०। यदि कोई बल  $P$  एक आनत घरातल के समानान्तर कार्य करना हुआ और 11' भार के एक पिंड को समतुल्यता हुआ घरातल पर प्रतिबल  $R$  उत्पन्न करता है, तो सिद्ध करो कि यह बल क्षैतिज दिशा में कार्य करना हुआ और भार  $R$  के एक पिंड को समतुल्यता हुआ घगतल पर प्रतिबल 11' उत्पन्न करेगा।

११। 11 और 12 फुट लम्बे दो मज्बे इस प्रकार नियत हैं कि उनके नीचे के सिरे एक क्षैतिज घगतल पर हैं और ऊपर के सिरे एक दूसरे को मिला करते हैं, इन मज्बों पर क्रम में 11' और 12 वीं भार के दो पिंड रखे हुये हैं और एक टोरी में बंधे हुये हैं जो मज्बों के उभयनिष्ठ दीर्घ में जाती है, 11' का मान मापूम करो।

१२। क्षैतिज से कोण  $\alpha$  बनाती हुई ट्रेय-लाइन की एक ओर कुछ लड़े हुये ठेले, जिसमें से प्रत्येक पर एक टन भार लदा हुआ है, लाइन की दूसरी ओर जो क्षैतिज से कोण  $\beta$  बनाती है, मज्बा में उनसे ही माली ठेलों में रीके गये हैं। एक ठेले का भार मापूम करो।

१३। एक पिंड एक घरातल पर रखा हुआ है जो क्षैतिज से कोण  $\alpha$  बनाना है। यदि घरातल का प्रतिबल लगाये हुये सामर्थ्य के बराबर है, तो सिद्ध करो कि सामर्थ्य का आनत घगतल से झुकाव  $90^\circ - 2\alpha$  है।

१४। एक भारी छोरी इस प्रकार रखी हुई है कि उसका एक भाग किसी दिग्ग्रे हुये आनत घरातल पर है और शेष भाग घरातल के शिखर पर लगी हुई एक छोटी सी घिरनी पर जाकर ऊर्ध्वाधर लटका हुआ है।

बताओ डोरी का कौन सा बिन्दु घिरनी के ऊपर रखा जाय कि वह समतुलित रहे ?

१५। एक ही ऊँचाई के दो आनत धरातलों पर दो भार क्रम से एक डोरी द्वारा जो धरातलों के उभयनिष्ठ बिन्दु से जाती है और उनके समानान्तर है, रुके हुये हैं। एक धरातल की लम्बाई उसकी ऊँचाई से दुगुनी है, और दूसरे की लम्बाई उनके आधार से दुगुनी है। सिद्ध करो कि एक धरातल का प्रतिबल दूसरे धरातल के प्रतिबल से तिगुना होगा।

१६। 50 पी० भार का एक पिंड चिकने धरातल पर जो क्षैतिज से  $20^{\circ} 20'$  के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक बल से रुका हुआ है जो धरातल पर ऊपर की ओर कार्य करता है ; लेखा-चित्र द्वारा, अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके बल और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

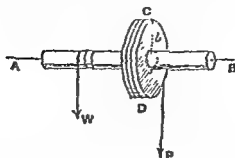
१७। 20 पी० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर, जो क्षैतिज से  $25^{\circ}$  के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक बल द्वारा जो धरातल से  $35^{\circ}$  का कोण बनाते हुये कार्य करता है, रोका गया है, लेखा-चित्र द्वारा अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके  $P$  और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

१८। 30 पी० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर जो क्षैतिज से  $28^{\circ} 15'$  के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक क्षैतिज बल  $P$  से रुका हुआ है ; लेखा-चित्र द्वारा अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके  $P$  और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

### (घ) चक्र और धुरी

१५९—इस मशीन में एक मजबूत बेलन अथवा धुरी होती है जिसके सिरों पर  $A$  और  $B$  दो चूल् होने हैं जो नियत आलम्बनों पर बेरोक घूम सकते हैं। धुरी पर दृढ़ता से एक पहिया अथवा चक्र,  $CD$  लगा होता है जिसका धरातल धुरी पर लम्ब होता है।

धुरी के चारों ओर एक रस्मी लिपटी होती है जिसका एक सिरा



मजबूती से धुरी में बँधा होता है और उसके दूसरे सिरे पर भार लटकाया जाता है।

चक्र की परिधि के चारों ओर पहली रस्सी के विपरीत दिशा में एक दूसरी रस्मी लिपटी होती है जिसका एक सिरा मजबूती से चक्र में बँधा होता है और जिसके दूसरे सिरे पर सामर्थ्य लगाया जाता है। चक्र की परिधि में नाली बनी होती है ताकि रस्मी फिसलने न पावे।

१६०—सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

धारा ९३ में हम सिद्ध कर आये हैं कि कोई पिंड जो किसी नियत अक्ष पर बेरोक घूम सकता है समतुलित होता है जबकि अक्ष पर बलों के घूर्णों का बीजोद्योग शून्य हो। इस स्थिति में जो बल मशीन पर कार्य करते हैं वे सामर्थ्य  $P$  और भार  $W$  हैं जिनकी प्रवृत्ति मशीन की विपरीत दिशाओं में घुमाने की होती है। अतः यदि धुरी की त्रिज्या  $a$  और चक्र की त्रिज्या  $b$  हो, तो समतुलन के नियम से

$$P \cdot b = W \cdot a \dots \dots \dots (१).$$

$$\text{अतः यांत्रिक लाभ} = \frac{W}{P} = \frac{b}{a} = \frac{\text{चक्र की त्रिज्या}}{\text{धुरी की त्रिज्या}}.$$

कर्म के सिद्धान्त की जाँच। मान लो मशीन चार संमकोण घूम जाती है। रस्मी का एक भाग जिसकी लम्बाई  $2\pi b$  है चक्र में खुल जाता

हैं और इसलिये  $P$  यह दूरी उत्तर आता है। साथ ही साथ  $2\pi a$  के बराबर रस्सी का भाग धुरी पर लिपट भी जाता है और इस प्रकार  $W$  यह दूरी उठ जाता है। इसलिये  $P$  द्वारा किया गया कर्म  $= P \times 2\pi b$  और  $W$  के विपरीत किया गया कर्म  $= W \times 2\pi a$ । यह सम्बन्ध (१) से एक दूसरे के बराबर है।

$$\text{वेग-निष्पत्ति (धारा १३७)} = \frac{2\pi b}{2\pi a} = \frac{b}{a} = \text{यांत्रिक लाभ।}$$

१६१—सैद्धान्तिक रूप से  $\frac{b}{a}$  राशि को बहुत बड़ा बना कर हम यांत्रिक लाभ को मनचाहा बड़ा बना सकते हैं; परन्तु व्यवहारिक रूप से इसमें सीमायें हैं। चूँकि धुरी के नियत आलम्बनों पर दबाव,  $P$  और  $W$  से समतुलित होता है, इसलिये धुरी की मोटाई अर्थात्  $2a$  अनुचित रूप से कम नहीं की जा सकती अन्यथा धुरा टूट जायगा। न व्यवहार में चक्र की त्रिज्या ही अधिक बढ़ाई जा सकती है, क्योंकि तब मशीन सहज में घुमाने योग्य न रहेगी। अतः यांत्रिक लाभ के सम्भव मान, एक ओर हमारी मशीन की मजबूती और दूसरी ओर मशीन के आकार को उचित सीमाओं के भीतर रखने की आवश्यकता से सीमित है।

१६२—धारा १६० में हमने रस्सियों की मोटाई को नगण्य माना था। परन्तु यदि मोटाई, चक्र और धुरी की त्रिज्याओं की तुलना में न छोड़ी जा सके, तो हम यह मान कर कि रस्सियों के तनाव उनके बीचोबीच के तांगों पर कार्य करते हैं, उन पर विचार कर सकते हैं।

मान लो उन रस्सियों की त्रिज्याये जो धुरी और चक्र के चारों ओर जाती हैं क्रमसे  $x$  और  $y$  हैं; अब चूँकि को मिलानेवाली रेखा से तनाव की त्रिज्या-रेखाओं की दूरियाँ क्रमसे  $(a+x)$  और  $(b+y)$  हैं। अतः समतुलन के नियम से

$$P(b+y) = W(a+x),$$

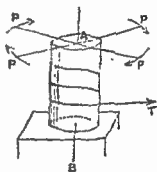
$$\therefore \frac{P}{W} = \frac{\text{धुरी और रस्सी की त्रिज्याओं का जोड़}}{\text{चक्र और रस्सी की त्रिज्याओं का जोड़}}।$$



१६३—चक्र-धुरी के दूसरे रूप 'विण्डलैम', जिसका प्रयोग कुँए से पानी खींचने में होता है, और 'कंपैटन' है जो जहाज पर काम में आता है। इन मशीनों में सामर्थ्य धुरी अथवा बेलन के चारों ओर लिपटी हुई रस्सी द्वारा लगाये जाने के बजाय जैसा कि धारा १५९ में है, धुरी पर लगे दृढ़ लम्बे बारों के मिरों पर लगाया जाता है।

'विण्डलैम' में धुरी क्षैतिज होता है और 'कंपैटन' में ऊर्ध्वाधर।

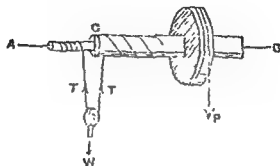
'कंपैटन' में प्रति-चक्र धुरी के चारों ओर लिपटी हुई रस्सी का तनाव  $T$  होता है, और सामर्थ्य में वे बल होते हैं जो धुरी के बिन्दु  $A$  पर माफेट में लगी हुई छड़ों के मिरों पर लगाये जाते हैं। भुजाओं के जोड़ों में यह लाभ होता है कि 'कंपैटन' के दिग्मान पर दबाव बहुत कम अथवा नष्ट हो जाता है। समतुलन के नियम धारा १६० की भाँति निकाले जा सकते हैं।



१६४—अन्तरीय चक्र और धुरी। साधारण चक्र और धुरी का थोड़ा परिवर्तित रूप अन्तरीय चक्र और धुरी है। इस मशीन की धुरी में दो बेलन होते हैं जिनका एक ही अक्ष होता है और जो मिरों पर एक दूसरे से जुड़े होते हैं। दोनों बेलनों की त्रिज्याएँ भिन्न-भिन्न होती हैं। रस्सी का एक सिरा इन बेलनों में से एक के चारों ओर लिपटा होता है और दूसरा सिरा दूसरे बेलन के चारों ओर विपरीत दिशा में लिपटा होता है। रस्सी के छोटे भाग में एक धारनी लटकी होती है जिससे भार लटकाया जाता है। रस्सी का वह भाग जो छोटे बेलन के चारों ओर लिपटा होता है उसमें मशीन को सामर्थ्य की ही दिशा में घुमाने की प्रवृत्ति होती है।

पहले की भाँति मान लो कि चक्र की त्रिज्या  $b$  है और धुरी के  $AC$  और  $CB$  भाग की त्रिज्याएँ  $a$  और  $c$  हैं, जिनमें  $a$  छोटी है।

चूँकि घिरनी चिकनी है, इसलिये उसके चारों ओर जाने वाली डोरी का तनाव  $T$  पूरी लम्बाई भर वही रहता है, और इसलिये भार की समतुलित अवस्था में  $T = \frac{1}{2}W$ :



यदि मशीन समतुलित अवस्था में है, तो रेषा  $AB$  पर घूर्ण लेकर

$$P.b + T.a = T.c$$

$$\therefore P = T \frac{c-a}{b} = \frac{W}{2} \frac{c-a}{b}$$

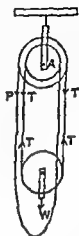
$$\text{अतः यांत्रिक लाभ} = \frac{W}{P} = \frac{2b}{c-a}$$

घुरी के दोनों भागों की त्रिज्याओं  $c$  और  $a$  को लगभग बराबर बना कर हम यांत्रिक लाभ को बिना मशीन को कमजोर किये हुये, बहुत अधिक बना सकते हैं।

१६५—वेस्टन की अन्तरीय घिरनी। इस मशीन में दो गुटके होते हैं; ऊपर के गुटके में लगभग एक ही आकार की दो घिरनियाँ होती हैं जो एक साथ एक घिरनी की तरह घूमती हैं; नीचे के गुटके में एक घिरनी होती है जिससे भार लटकाया जाता है।

चित्र मशीन के परिच्छेद को प्रदर्शित करता है। एक बिना छोर की जंजीर पहले ऊपर की घिरनियों में से बड़ी पर से जाती है फिर नीचे,

की घिरनी के नीचे में ऊपर की छोटी घिरनी के ऊपर जाती है। जंजीर का शेष भाग ढीला लटक रहा है और जंजीर के पहले भाग में मिला होना है। सामर्थ्य  $P$  इस प्रकार लगाया जाता है जैसा चित्र में दिखलाया गया है। जंजीर ऊपर की घिरनियों के पृष्ठों पर छोटे छोटे बहिर्गत भागों अथवा घिरनियों में गड़कों द्वारा जिनमें जंजीरों की कड़ियाँ ठीक ठीक फिट हो जाती हैं फिसलने में रोकी जाती हैं।



यदि जंजीर के उन भागों का तनाव जो भार  $W$  को समर्थाने हैं  $T$  हो, तो चूँकि यह भाग लगभग ऊर्ध्वाधर है, तथा जंजीर और नीचे की घिरनियों के भारों की उपेक्षा की जा सकती है,  $2T = W \dots (1)$ .

यदि ऊपर के गूटके की बड़ी और छोटी घिरनियों की त्रिज्याएँ  $R$  और  $r$  हैं, तो ऊपर के गूटके के केन्द्र  $A$  पर घूर्ण लेकर

$$P R + T \cdot r = T \cdot R.$$

अतः 
$$P = T \frac{R-r}{R} = \frac{W}{2} \frac{R-r}{R}.$$

इसलिये मशीन का यांत्रिक लाभ 
$$= \frac{W}{P} = \frac{2R}{R-r}.$$

क्योंकि  $R$  और  $r$  लगभग बराबर हैं अतः यह यांत्रिक लाभ बहुत अधिक है।

अन्तरीय चक्र और धुरी में किसी भार को अधिक दूरी तक उठाने में बहुत रस्मों की आवश्यकता होती है। यह अमुविधा अन्तरीय घिरनी में नहीं होती है।

### उदाहरणमाला २७

१। यदि चक्र और धुरी की त्रिज्याएँ क्रम में २ फुट और ३ इंच हैं तो वताओ ५६ पौ० भार को उठाने में कितना सामर्थ्य लगाना पड़ेगा।

२। यदि चक्र और घुरी की त्रिज्यायें क्रम से 30 इंच और 5 इंच हों तो बताओ 20 पौ० भार का बल कितना भार संहाल सकेगा। घुरी का आलम्बनों पर दबाव भी मालूम करो।

यदि प्रत्येक रस्सी की मोटाई एक इंच है, तो अब कितना भार संहाला जा सकेगा ?

३। यदि एक चक्र और घुरी के द्वारा 3 पौ० का एक बल 30 पौ० के भार को संहालता है और यदि घुरी की त्रिज्या 2 इंच है तो चक्र की त्रिज्या मालूम करो।

४। एक कैम्पटन की घुरी का व्यास 16 इंच है और उसमें 8 छड़ें हैं। बताओ उसके अक्ष में कितनी दूर पर 8 आदमी, प्रत्येक आदमी एक एक छड़ पर 26½ पौ० बल का प्रयोग करके घबका लगाये कि मशीन में एक टन भार को उठाने का पर्याप्त प्रतिरोध पैदा हो जाय।

५। चार मल्लाह एक कैम्पटन द्वारा, जिसकी त्रिज्या 4 इंच है और जिसके आरोों की लम्बाई 6 फुट है, एक लंगर उठा रहे हैं। यदि हर एक आदमी 112 पौ० भार का बल लगाता है तो लंगर का भार मालूम करो।

६। चार चक्र और घुरे, जिसमें से हर एक में त्रिज्याये 5:1 की निष्पत्ति में हैं इस प्रकार रखे गये हैं कि प्रत्येक घुरी की परिधि दूसरे चक्र की परिधि से लगी हुई है। बताओ 1875 पौ० के भार को संहालने में कितनी सामर्थ्य की आवश्यकता होगी ?

७। किसी चक्र और घुरी की त्रिज्याये क्रम से 2 फुट और 2 इंच हैं, और उनसे लटकती हुई डोरियाँ एक सम दंड जिसकी लम्बाई 2 फुट 2 इंच और भार 10 पौ० है, के सिरों से बंधी हुई हैं। बताओ एक डोरी से कौन सा भार लटकाया जाय कि दंड क्षैतिज रहे।

८। चक्र और घुरी की डोरी के ऊर्ध्वाधर पाश में लटकती हुई एक धिरनी एक हन्डरवेट भार को संहाले हुये है। डोरी का एक सिरा घुरी के चारों ओर और दूसरा सिरा उसके विपरीत दिशा में चक्र के चारों ओर

लिपटा हुआ है। यदि चक्र और घुरी की त्रिज्यायें क्रमसे 1 फुट और 2 इंच हैं तो उस सामर्थ्य को मालूम करो जो 2 फुट लम्बी भुजा के सिरे पर कार्य करके और घुरी को घुमा कर भार को सम्हाल सके।

९। अन्तरीय चक्र और घुरी में यदि चक्र की त्रिज्या 1 फुट है और घुरी के दोनो भागों की त्रिज्यायें क्रम से 5 और 4 इंच हैं, तो बताओ कौन सा सामर्थ्य 56 पौ० के भार को सम्हाल सकेगा ?

१०। अन्तरीय चक्र और घुरी में, यदि चक्र की त्रिज्या 18 इंच है और घुरी के दोनो भागों की त्रिज्यायें क्रम से 6 और 4 इंच हैं, तो बताओ 20 पौ० का सामर्थ्य किम भार को रोक सकेगा ?

११। एक चक्र घुरी में चक्र की त्रिज्या 1 फुट और घुरी की त्रिज्या 1 इंच है ; यदि दस दस पौ० के दो भार चक्र के दो किनारों पर इस प्रकार बाँध दिये जायें कि उनको मिलाने वाली रेखा चक्र के केन्द्र पर  $120^\circ$  का केन्द्र बनाये, तो बताओ घुरी में लटकती हुई डोरी बड़ा से बड़ा कौन सा भार सम्हाल सकती है।

१२। एक चक्र घुरी में यदि चक्र की त्रिज्या घुरी की त्रिज्या से छः गुनी है, और यदि 5 पौ० भार के सामर्थ्य में कोई पिंड 30 फुट उठाया जा सकता है, तो बताओ कितना कर्म व्यय होगा।

१३। एक कैप्स्टन, जिसका व्यास 20 इंच है, एक लॉवर द्वारा कार्य में लाया जाता है। लॉवर की लम्बाई कैप्स्टन के अक्ष में 5 फुट है। बताओ एक टन भार के एक पिंड को चिकने धरातल पर, जो क्षैतिज से कोज्या  $1\frac{1}{2}$  का कोण बनाता है, 35 फुट ऊपर की ओर एक रस्सी द्वारा खींचने में कितना कर्म करना पड़ेगा। लॉवर के सिरे पर लगाया गया बल भी मालूम करो और वह दूरी भी बताओ जो प्रयोग-विन्दु चलता है।

१४। अन्तरीय चक्र घुरी और वेस्टन के अन्तरीय चक्र में कर्म के मिद्धान्त की जाँच करो और प्रत्येक अवस्था में वेग-निष्पत्ति मालूम करो।

### (घ) साधारण तुला (तराजू)

१६६—साधारण तुला (तराजू) में एक दृढ़ दंड  $AB$  (धारा १६७) होता है, जिसके प्रत्येक सिरे पर एक पलड़ा लटका होता है, और जो दंड के बाहर एक आलम्ब  $O$  के चारों ओर बेरोक घूम सकता है। आलम्ब और दंड एक दूसरे में दृढ़तापूर्वक जुड़े होते हैं, और यदि तुला ठीक से बनी हो, तो  $O$  बिन्दु पर मूलतः फौलाद की एक खूँटी होती है जिसका सिरा नीचे की ओर झुका होता है और एक छोटे में प्लेट पर टिका रहता है।

जिस पिंड को तोलना होता है उसे एक पलड़े में रखते हैं और दूसरे पलड़े में ज्ञात परिमाण के भार रखे जाते हैं। इन भारों को इस प्रकार रखते हैं कि तुला क्षैतिज अवस्था में रहे। यदि  $OH$  दंड पर लम्ब हो और भुजा  $HA$  और  $HB$  की लम्बाइयाँ बराबर हों और यदि दंड का गुरुत्व-केन्द्र  $OH$  रेखा में हो, और पलड़ों के भार बराबर हों, तो पिंड का भार दूसरे पलड़े में रखे हुये भारों के योग के बराबर होता है।

यदि पिंड का भार दूसरे पलड़े में रखे हुये भारों के योग के बराबर नहीं है, तो तुला का दंड क्षैतिज अवस्था में नहीं रहेगा परन्तु क्षैतिज से झुका रहेगा।

अच्छी तुलाओं में दंड के बिन्दु  $H$  पर बहुधा एक लम्बा प्वाइटर लगा होता है। इस प्वाइटर का सिरा एक अंशकित पट्टी पर घूमता है, और जब दंड क्षैतिज अवस्था में होता है तो प्वाइटर ऊर्ध्वाधर हो जाता है और पट्टी शून्य को सूचित करती है।

१६७—मिस्री तुला की समतुलित अवस्था मालूम करना जबकि पलड़ों में रखे हुये भार बराबर नहीं हैं।

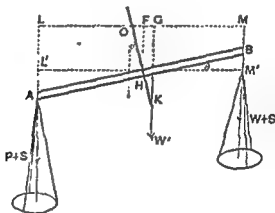
मान लो पलड़ों में रखे हुये भार  $P$  और  $W'$  हैं, जिनमें से पहला बड़ा है, और प्रत्येक पलड़े का भार  $S$  है, और मान लो कि दंड और उसमें दंडना पूर्वक लगे हुये भागों का भार  $W''$  है जो  $OH$  के किसी बिन्दु  $K$  पर कार्य करता है।

[चित्र अनुपातानुरूप नहीं खींचा गया है ताकि बिन्दु स्पष्ट रूप से दिखाया जा सके ; वास्तव में  $K$  दंड के अत्यन्त निकट होता है।]

मान लो समतुलित अवस्था में दंड क्षैतिज में  $\theta$  कोण बनाता है, इसलिये  $OH$  ऊर्ध्वाधर में वही  $\theta$  कोण बनायेगा।

मान लो  $OH$  और  $OK$  क्रम में  $h$  और  $k$  हैं, और मान लो  $AH$  अथवा  $HB$  की लम्बाई  $a$  है।

मान लो  $O$  और  $H$  में खींची गई क्षैतिज रेखाएँ दंड के सिरों  $A$  और  $B$  से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखाओं को क्रम में  $L, M, L'$  और  $M'$  बिन्दुओं



पर मिलती है। और मान लो कि  $H$  और  $K$  से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखाएँ  $LM$  को क्रम से  $F$  और  $G$  पर मिलती है।

जब मुला समतुलित अवस्था में होती है, तो  $O$  पर बलों के घूर्ण समतुलित होंगे।

$$\therefore (P+S).OL = (W'+S)OM + W''.OG,$$

$$\text{अर्थात्, } (P+S)(FL-FO) = (W'+S)(FM+OF) + W''.OG,$$

$$\therefore (P+S)(a \cos \theta - h \sin \theta) = (W'+S)(a \cos \theta + h \sin \theta) + W''.k \sin \theta.$$

[क्योंकि  $OF=OH$  कोज्या  $FOH=h$  ज्या  $\theta$ ;  $OG=OK$  ज्या  $\theta$ ;  
और  $FL=HL'=a$  कोज्या  $\theta$ .]

$$\therefore a \text{ कोज्या } \theta (P-II') = \text{ज्या } \theta [II'K + (P+II'+2S)h].$$

$$\therefore \text{स्पज्या } \theta = \frac{(P-II')a}{II'K + (P+II'+2S)h}.$$

१६८—अच्छे तुला के आवश्यक गुण ।

(१) तुला सही होनी चाहिये ।

यह उस दशा में होगा जब तुला की भुजायें बराबर हों, पलकों के भार बराबर हों, और दंड का गुरुत्व-केन्द्र आशुम्ब से दंड पर डाले गये लम्ब पर हो । क्योंकि इस अवस्था में दंड क्षैतिज रहेगा यदि बराबर भार पलकों में रखे जाय ।

इस बात को जांच करने के लिये कि तुला सही है अथवा नहीं पहले यह देखो कि जब पलका खाली हो तो दंड क्षैतिज रहता है कि नहीं । फिर एक पलके में रखे हुये पिंड को समतुलित करने के लिये दूसरे पलके में पर्याप्त भार रखो ताकि दंड क्षैतिज हो जाय । अब निड और भारों को अदल बदल दो । यदि अब भी वे एक दूसरे से समतुलित रहे तो तुला सही है और यदि दूसरी अवस्था में दंड ऊर्ध्वाधर से झुक जाता है तो तुला सही नहीं है ।

(२) तुला सूक्ष्मप्राप्ती होनी चाहिये, अर्थात् पलकों में रखे हुये भारों के थोड़े से ही कम अन्तर के लिये दंड क्षैतिज से काफी झुका रहना चाहिये ।

$P$  और  $II'$  के बीच के किसी निर्दिष्ट अन्तर के लिये दंड का क्षैतिज से जितना अधिक झुकाव होगा उतनी ही अधिक तुला सूक्ष्मप्राप्ती होगी ; और किसी निर्दिष्ट झुकाव  $\theta$  के लिये जितना कम भारों के बीच में अन्तर होगा उतनी ही अधिक तुला सूक्ष्मप्राप्ती होगी ।

अतः जब  $P-II'$  दिया हुआ हो, तो सूक्ष्मप्राप्ति बढ़ती है जब  $\theta$  बढ़ता है और इसलिये जब स्पज्या  $\theta$  भी बढ़ती है ; और जब  $\theta$  दिया हुआ हो, तो वह  $\frac{1}{P-II'}$  के साथ परिणमित होती है ।



इसलिये सूक्ष्मप्राप्तता लगभग  $\frac{\text{स्पज्या } \theta}{P-IV'}$ ,

अर्थात्  $\frac{a}{IV'K + (P+IV+2S)h}$  ( धारा १६७ ) से नापी जाती है ।

अतः तुला की सूक्ष्मप्राप्तता अधिक होगी यदि  $h$  और  $k$  की अपेक्षा भुजा  $a$  काफी लम्बी हो और दंड का भार  $IV'$  तुला की लम्बाई और दृढ़ता ध्यान में रखते हुये जितना सम्भव हो कम से कम हो ।

यदि  $h$  शून्य नहीं है, तो सूक्ष्मप्राप्तता  $P$  और  $IV'$  अर्थात् पलङ्गों में रखे हुये भारों के मानों पर निर्भर रहती है । रासायनिक प्रयोगशाला में जिन तुलाओं का प्रयोग होता है उनमें यह बात नहीं चाही जाती है । ऐसी तुलाओं में  $h$  शून्य होता है अर्थात् चित्र में बिन्दु  $O$ ,  $K$  पर पड़ता है । इस अवस्था में सूक्ष्मप्राप्तता  $O$  अथवा  $H$  के नीचे दंड के गुस्त्व-केन्द्र की दूरी,  $K$  के साथ, उत्क्रमतः परिणमित होती है ।

परन्तु  $h$  और  $k$  दोनों शून्य नहीं होने चाहिये, क्योंकि तब दोनों बिन्दु  $O$  और  $K$ ,  $H$  पर पड़ेगे । ऐसी अवस्था में जब पलङ्गों में भार बराबर होंगे तो, जैसा कि धारा १४४ में देख आये हैं, तुला किसी भी अवस्था में समतुलित रह सकती है, अथवा यदि पलङ्गों में भार बराबर न हों तो तुला ऊर्ध्वाधर में जितना सम्भव है, उतना निकट आ जायगी ।

(३) तुला स्थायी होनी चाहिये और घीघ्रता से उसे समतुलित अवस्था में आजाना चाहिये ।

तुला की समतुलित अवस्था में आने के समय का निर्णय करना वास्तव में गत्यात्मक प्रश्न है । तथापि हम यह मान सकते हैं कि यह नियम उस समय भली प्रकार सन्तुष्ट हो जाता है जब आलम्ब  $O$  पर बलों के घूर्णन महत्तम हों । जब प्रत्येक पलङ्गे में भार  $P$  है, तो उन बलों के घूर्णन जो तुला को समतुलित अवस्था में लाने का प्रयाग करते हैं

$$= (P+S) (a \cos \theta + h \sin \theta) - (P+S) (a \cos \theta - h \sin \theta) + IV' \cdot h \sin \theta$$

$= [2 (P+S) h + W' . k]$  ज्या  $\theta$ .

यह व्यंजक उस समय महत्तम होगा जब  $h$  और  $k$  बड़े से बड़े हों।

चूँकि तुला अधिक से अधिक तब सूक्ष्मग्राह्य होती है जब  $h$  और  $k$  छोटे होते हैं, और अधिक से अधिक तब स्थायी होती है जब यह बड़े होते हैं, अतः हम देखते हैं कि किसी तुला में अधिक सूक्ष्मग्राह्यता और शीघ्रता से तौलना कुछ परिमाण तक विरोधी होते हैं। व्यवहार में यह इतना आवश्यक नहीं है क्योंकि उन तुलाओं में जिनमें सूक्ष्मग्राह्यता की आवश्यकता होती है (जैसा कि उन तुलाओं में जिनका प्रयोग प्रयोगशालाओं में होता है) हम शीघ्रता से तौलने का ध्यान छोड़ सकते हैं; इसके विपरीत वे तुलायें हैं जिनका साधारण व्यापार में प्रयोग होता है।

तुलाओं में जहाँ तक सम्भव हो सके दोनों गुण, सूक्ष्मग्राह्यता और शीघ्रता से तौलना, रखने के लिये उनकी भुजायें हल्की और लम्बी होनी चाहिये और साथ ही दंड से आलम्ब की दूरी भी अधिक रहनी चाहिये।

१६९—द्विक तौलन। इस रीति से यदि तुला सही नहीं है तो भी किसी पिंड का भार ठीक ठीक निकाला जा सकता है।

जिस पिंड को तौलना हो उसे एक पलड़े में रखो और दूसरे पलड़े में रेत अथवा कोई और ऐसी ही उपयुक्त वस्तु रखो जो पिंड से समतुलित हो जाय। फिर पिंड को हटा दो और उसके स्थान पर ज्ञात भार रखो जो रेत से फिर समतुलित हो जाय। अब पिंड का भार इन ज्ञात भारों के योग के बराबर होगा।

इस रीति का प्रयोग अच्छी से अच्छी तुलाओं में भी किया जाता है जब अत्यन्त शुद्धता की आवश्यकता होती है। इसे बोरदा की रीति कहते हैं।

१७०—उदाहरण १। एक तुला की भुजायें लम्बाई में बराबर हैं परन्तु दंड का गुरुत्वकेन्द्र उसके मध्य-बिन्दु पर नहीं है। यदि एक पिंड क्रमशः प्रत्येक पलड़े में रखकर तौला जाय, तो सिद्ध करो कि उसका वास्तविक भार प्रतीपमान भारों का समान्तर मध्यमान होगा।

मान लो भुजाओं को लम्बाई  $a$  है, और दंड के गुरुत्व-केन्द्र की आलम्ब से क्षैतिज दूरी  $x$  है।

मान लो एक पिंड का भार, जिसका वास्तविक भार  $W$  है, तौलने पर क्रमशः  $W_1$  और  $W_2$  प्रतीत होता है।

यदि दंड का भार  $W'$  है, तो

$$W a = W' x + W_1 a,$$

और  $W_2 a = W' x + W a.$

अतः घटा कर,

$$(W - W_2) a = (W_1 - W) a$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)$$

= प्रतीपमान भारों का समान्तर मध्यमान।

उदाहरण २। एक तुला की सुझाय लम्बाई में बराबर नहीं हैं, पल्लु जब पल्लुओं में कोई भार न रखा हो तो दंड क्षैतिज रहता है; सिद्ध करो यदि एक पिंड क्रमशः प्रत्येक पल्लु में रखा जाय तो उसका वास्तविक भार प्रतीपमान भारों का गुणोत्तर मध्यमान होगा। [गास की निधि]

यह भी सिद्ध करो कि यदि एक दूकानदार एक ही वस्तु के बराबर परिमाण को प्रत्येक पल्लु का क्रमशः प्रयोग करके तौले, तो वह ठग जायगा।

क्योंकि जब पल्लुओं में कोई भार नहीं होते हैं, तो दंड क्षैतिज रहता है, अतः दंड और पल्लुओं का गुरुत्व-केन्द्र आलम्ब के ऊर्ध्वापर नीचे होगा।

मान लो दंड को लम्बाइयाँ  $a$  और  $b$  हैं और मान लो एक पिंड का भार जिसका वास्तविक भार  $W$  है, तौलने पर क्रमशः  $W_1$  और  $W_2$  प्रतीत होता है।

अतः  $W a = W_1 b \quad \dots \quad (1),$

और  $W_2 a = W b \quad \dots \quad (2).$

अतः गुणा करके  $W^2 ab = W_1 W_2 ab,$

$$\therefore W = \sqrt{W_1 W_2},$$

अर्थात् वास्तविक भार प्रतीपमान भारों का गुणोत्तर मध्यमान है।

अब यदि दूकानदार एक ही वस्तु को, जो परिमाण में  $IV$  है, दोनों पलकों में क्रमशः तोले तो वास्तव में वह अपने ग्राहकों को परिमाण में  $IV_1 + IV_2$  देगा।

$$\begin{aligned} \text{इसलिये } IV_1 + IV_2 - 2IV &= IV \frac{a}{b} + IV' \frac{b}{a} - 2IV \\ &= IV \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = IV \frac{(a+b)^2}{ab} \end{aligned}$$

अब  $a$  और  $b$  के मान चाहे जो हों, इस समीकरण का दायी पक्ष हमेशा धन होगा इसलिये  $IV_1 + IV_2$  हमेशा  $2IV$  से अधिक होगा। अतः दूकानदार ठगा जाता है।

सांख्यिक उदाहरण। यदि भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रम से 11 और 12 इंच हैं और प्रत्येक दना में प्रचौरमान भार 66 पाँड है, तो वास्तविक भार  $1\frac{1}{2} \cdot 66$  और  $1\frac{2}{3} \cdot 66$  अर्थात् 60½ और 72, अर्थात् 132½ पाँ० होगा, इसलिये दूकानदार को  $\frac{1}{2}$  पाँ० का घाटा होगा।

उदाहरण ३। यदि किसी तुला का गुस्त्व-केन्द्र उसके दंड के मध्य-बिन्दु पर नहीं है और यदि एक दूकानदार किसी ग्राहक के किसी वस्तु के  $2IV$  परिमाण का बराबर बराबर भागों में दोनों पलकों से तोल कर देता है, तो सिद्ध करो कि यदि दंड का गुस्त्व-केन्द्र बड़ी भुजा में है तो वह ठगा जायगा।

मान लो भुजाओं की लम्बाइयाँ  $a$  और  $b$  हैं; और मान लो कि तुला का भार  $IV'$  भुजा  $b$  के एक बिन्दु पर जो आलम्ब मे  $x$  की दूरी पर है कार्य करता है। मान लो एक पिंड जिसका भार  $IV$  है, क्रम में दोनों पलकों में रख कर तोलने में  $IV_1$  और  $IV_2$  प्रतीत हो जाते हैं, तो

$$IV \cdot a = IV_1 \cdot b + IV' \cdot x,$$

$$\text{और } IV_2 \cdot a = IV \cdot b + IV' \cdot x.$$

$$\begin{aligned} \therefore IV_1 + IV_2 - 2IV &= \frac{IV \cdot a - IV' \cdot x}{b} + \frac{IV \cdot b + IV' \cdot x}{a} - 2IV \\ &= \frac{IV(b-a)^2}{ab} + IV' \cdot \frac{b-a}{ab} \cdot x. \end{aligned}$$

यदि  $b > a$ , तो इस समीकरण का दायाँ पक्ष धन है और  $W_1 + W_2 > 2W$ ,

अतः यदि दंड का गुरुत्व-केन्द्र बड़ी भुजा में है तो दूकानदार ठगा जायगा।

### उदाहरणमाला २८

१। एक तुला में केवल यही दोष है कि उसके पलड़ों के भार बराबर नहीं हैं, तो बताओ उस पिंड का वास्तविक भार क्या है जो 10 पौं० भार से एक पलड़े में और 12 पौं० भार से दूसरे पलड़े में समतुलित हो ?

२। एक तुला की भुजायें क्रमसे 8 इंच और 9 इंच लम्बी हैं। जिस वस्तु का भार मालूम करना है वह बड़ी भुजा से लटकाई गई है, तो बताओ वस्तु का वास्तविक भार क्या है जब उसका प्रतीपमान भार 27 पौं० है।

३। साधारण तुला का एक पलड़ा इस प्रकार लदा हुआ है कि उस पिंड का प्रतीपमान भार, जिसका वास्तविक भार 18 औंस है, 20 औंस है। वह भार मालूम करो जिससे पलड़ा लदा हुआ है।

४। किसी वस्तु के प्रतीपमान भार, जब तुला की दोनों भुजाओं से क्रमशः वीले जाते हैं, तो 9 और 4 पौं० पाये जाते हैं। भुजाओं की लम्बाइयों में निष्पत्ति और वस्तु का वास्तविक भार मालूम करो।

५। एक पिंड जब एक पलड़े में रखा जाय तो 24 पौं० तुलता प्रतीत होता है और जब दूसरे पलड़े में रखा जाय तो वही 25 पौं० तुलता प्रतीत होता है। यह मान कर कि तुला की भुजायें बराबर नहीं हैं पिंड का वास्तविक भार दशमलव के तीन अंकों तक मालूम करो।

६। एक तुला के पलड़े A में रखा हुआ सीसे का एक टुकड़ा दूसरे पलड़े B में रखे हुये 100 ग्रैन से समतुलित होता है। जब उमी टुकड़े को पलड़े B में रख देते हैं तो वह A में रखे हुये 104 ग्रैन से समतुलित होता है। बताओ तुला की भुजाओं में क्या निष्पत्ति है ?

७। एक पलड़े में रखा हुआ एक पिंड दूसरे पलड़े में रखे हुये 10 पौं० से समतुलित होता है। जब पिंड और भारों के स्थानों को

अदल बदल देते हैं तो पिंड से समतुलित होने के लिये 11 पौंड की आवश्यकता होती है। यदि छोटी भुजा की लम्बाई 12 इंच है तो बड़ी भुजा की लम्बाई और पिंड का भार मालूम करो।

८। एक हल्की भ्रमात्मक तुला की भुजायें 10:9 की निष्पत्ति में हैं। यदि सामान क्रम में दोनों भुजाओं से तोला जाय तो सिद्ध करो कि बेचने वाले को ९ प्रतिशत का घाटा होगा।

९। यदि एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें क्रम से 10 और 11 इंच लम्बी हैं, तो बताओ कि एक आदमी को दो शिलिंग प्रति पौंड की चाय के लिये वास्तविक मूल्य क्या देना पड़ेगा जबकि चाय (१) घड़ी, (२) छोटी भुजा के सिरे से तोली जाय।

१०। एक व्यापारी के भार सही हैं, परन्तु उसकी तुला की एक भुजा दूसरी से  $\frac{1}{100}$  छोटी है। यदि वह किसी औपधि को दो बराबर बराबर परिमाणों में, जिनमें से प्रत्येक का प्रतीपमान भार 9½ पौंड है 40 सि० प्रति पौंड की दर से एक बार एक पलड़े में रख कर और दूसरी बार दूसरे पलड़े में रखकर तोला कर बेचे, तो बताओ उसे क्या लाभ अथवा हानि होगी।

११। एक तुला में जब बराबर बराबर भार रखे जाते हैं तो दंड क्षैतिज नहीं रहता है। यह भी मालूम नहीं है कि तुला की भुजायें बराबर हैं अथवा नहीं और न यह ही मालूम है कि पलड़ों के भार बराबर हैं अथवा नहीं। एक पलड़े में रखे हुये 51.075 ग्रेन दूसरे पलड़े में रखे हुये 51.362 ग्रेन से और 23.592 ग्रेन 25.879 ग्रेन से समतुलित होते हैं। सिद्ध करो कि तुला की भुजायें बराबर हैं परन्तु पलड़े के भारों में 287 ग्रेन का अन्तर है।

१२। एक साधारण तुला में P और Q एक दूसरे से समतुलित है। उनके स्थानों का अदल बदल देने से ज्ञात होता है कि समतुलित अवस्था रखने के लिये हमें Q में उसका एक सौवां भाग और जोड़ना चाहिये। भुजाओं में और P और Q में निष्पत्तियाँ मालूम करो।

१३। एक गही तुला का एक पलड़ा लदा हुआ है। यदि एक पिंड

को क्रमशः दोनों पलड़ों में रखकर तोलें तो उसका भार  $P$  और  $Q$  प्रतीत होता है। पलड़े में लदा हुआ भार और पिंड का वास्तविक भार मालूम करो।

१४। एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें बराबर नहीं हैं और एक पलड़ा लदा हुआ है। एक पिंड जिसका वास्तविक भार  $P$  पौ० है, एक पलड़े में  $w$  पौ० और दूसरे पलड़े में  $w'$  पौ० तुल्यता हुआ प्रतीत होता है। भुजाओं में निष्पत्ति मालूम करो और वह भार भी मालूम करो जिससे पलड़ा लदा हुआ है।

१५। एक लची हुई तुला में जिसकी भुजायें बराबर नहीं हैं,  $P$  तौल में  $Q$ , और  $Q$  तौल में  $R$  प्रतीत होता है; बताओ तौल में  $R$  क्या प्रतीत होगा।

१६। एक लम्बे टुक के आकार का एक लकड़ी का टुकड़ा जिसकी चौड़ाई समान है और जिसका एक सिरा  $\frac{1}{2}$  इंच और दूसरा सिरा  $\frac{1}{4}$  इंच मोटा है, गुरुत्व-केन्द्र से लटका हुआ है और एक तुला के दंड का काम दे रहा है। तौलने वाले सामान की लम्बी भुजा से लटकाया जाता है। बताओ उस सामान का वास्तविक भार क्या होगा जिसका प्रतीपमान भार 20 पौ० है?

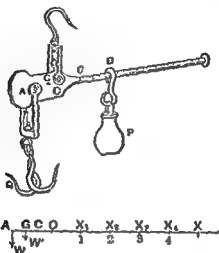
१७। एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें  $a$  और  $b$  हैं और भार  $W$  छोटी भुजा  $b$  के सिरे पर  $P$  से और भुजा  $a$  के सिरे पर  $Q$  से समतुलित होता है; सिद्ध करो कि  $\frac{a}{b} = \frac{P - W}{W - Q}$ ।

१८। एक तौलने वाली मशीन में बैठा हुआ एक आदमी यदि एक डंडी से, आलम्ब और उस बिन्दु के बीच में जिससे तुला लटकी हुई है, किमी बिन्दु को दबायें, तो सिद्ध करो कि उसका भार पहले से अधिक प्रतीत होगा।

### (छ) विषम-भुज तुला (स्टील-यार्ड)

१७१—साधारण अथवा रूमी विषम-भुज तुला (स्टील-यार्ड) पिंडों को तौलनेवाली एक मशीन है जिसमें एक दंड  $AB$  होता है जो एक नियत आलम्ब  $C$  के चारों ओर घूम सकता है।

विन्दु  $A$  पर एक कटिया अथवा एक पलड़ा लटका होता है जिसमें तोलने वाली वस्तु रखी जाती है, और भुजा  $CB$  पर एक भार  $P$  सरकाया



जाता है। यह विन्दु जिस पर  $P$  इस प्रकार रखा जाय कि दंड क्षैतिज हो जाय, पलड़े में रखे हुये पिंड के भार का निर्णय करता है। भुजा  $CB$  के भिन्न भिन्न विन्दुओं पर संख्याय सुदी होती है और वह चिह्न जिसपर  $P$  ठहरता है पिंड के भार को बताना है।

१७२—विषम-भुज तुला का अशुद्धि करना। मान लो विषमभुज तुला और पलड़े का भार  $W'$  है और  $G$  वह विन्दु है जिससे  $W'$  कार्य करता है। बहुधा दंड इस प्रकार बनाया जाता है कि  $G$  छोटी भुजा  $AC$  में हो।

जब पलड़े में कोई भार न हो तो मान लो कि  $O, CB$  में वह विन्दु है जिस पर सरकाने वाला भार  $P, W'$  में समतुलित होने के लिये रखा जाना चाहिये।

$G$  पर घूर्ण लेकर,

$$W' \cdot GC = P \cdot CO \quad \dots \quad (?)$$



को क्रमशः दोनों पलड़ों में रखकर तौलें तो उसका भार  $P$  और  $Q$  प्रतीत होता है। पलड़े में लदा हुआ भार और पिंड का वास्तविक भार मालूम करो।

१४। एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें बराबर नहीं हैं और एक पलड़ा लदा हुआ है। एक पिंड जिसका वास्तविक भार  $P$  पौ० है, एक पलड़े में  $w$  पौ० और दूसरे पलड़े में  $w'$  पौ० तुलता हुआ प्रतीत होता है। भुजाओं में निष्पत्ति मालूम करो और वह भार भी मालूम करो जिसमें पलड़ा लदा हुआ है।

१५। एक लची हुई तुला में जिसकी भुजायें बराबर नहीं हैं,  $P$  तौल में  $Q$ , और  $Q$  तौल में  $R$  प्रतीत होता है; बताओ तौल में  $R$  क्या प्रतीत होगा।

१६। एक लम्बे टंक के आकार का एक लकड़ी का टुकड़ा जिसकी चौड़ाई समान है और जिसका एक सिरा  $\frac{1}{2}$  इंच और दूसरा सिरा  $\frac{1}{4}$  इंच मोटा है, गुरुत्व-केन्द्र से लटका हुआ है और एक तुला के दंड का काम दे रहा है। तौलने वाले सामान को लम्बो भुजा से लटकाया जाता है। बताओ उस सामान का वास्तविक भार क्या होगा जिसका प्रतीपमान भार २० पौ० है?

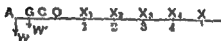
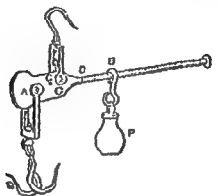
१७। एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें  $a$  और  $b$  हैं और भार  $W$  छोटी भुजा  $b$  के सिरे पर  $P$  से और भुजा  $a$  के सिरे पर  $Q$  से समतुलित होता है; सिद्ध करो कि  $\frac{a}{b} = \frac{P-W}{W-Q}$ ।

१८। एक तौलने वाली मशीन में बैठा हुआ एक आदमी यदि एक छड़ों से, आलम्ब और उस बिन्दु के बीच में जिससे तुला लटकी हुई है, त्रिमो बिन्दु को दबायें, तो सिद्ध करो कि उसका भार पहले से अधिक प्रतीत होगा।

### (छ) विषम-भुज तुला (स्टोल-याई)

१७१—माथारण अथवा रूमी विषम-भुज तुला (स्टोल-याई) पिंडों को तौलनेवाली एक मशीन है जिसमें एक दंड  $AB$  होता है जो एक नियत आलम्ब  $C$  के चारों ओर घूम सकता है।

बिन्दु  $A$  पर एक कटिया अथवा एक पलड़ा लटका होता है जिसमें तोलने वाली वस्तु रखी जाती है, और भुजा  $CB$  पर एक भार  $P$  सरकाया



जाता है। यह बिन्दु जिस पर  $P$  इस प्रकार रखा जाय कि दण्ड क्षैतिज हो जाय, पलड़े में रखे हुये पिंड के भार का निर्णय करता है। भुजा  $CB$  के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर संख्यायें सुदी होती हैं और यह विश्व जितपर  $P$  ठहरता है पिंड के भार को बताता है।

१७२—विषम-भुज तुला का अन्वयित करना। मान लो विषम-भुज तुला और पलड़े का भार  $W'$  है और  $G$  वह बिन्दु है जिसमें  $W'$  कार्य करता है। धरुया दंड इस प्रकार बनाया जाता है कि  $G$  लंबी भुजा  $AC$  में हो।

जब पलड़े में कोई भार न हो तो मान लो कि  $O, CB$  में वह बिन्दु है जिस पर सरकने वाला भार  $P, W'$  में समतुल्य होने के लिये रखा जाना चाहिये।

$G$  पर घूर्ण सेर,

$$W'.GC = P.CO$$

$$— \quad — \quad — \quad (1).$$

यह समीकरण  $O$  के स्थान को निर्णय करता है, जो बिन्दु शून्य को प्रदर्शित करता है।

जब पलड़े में भार  $W$  है, तो मान लो  $X$  वह बिन्दु है जहाँ पर  $P$  रखा जाना चाहिये। घूर्णन लेकर

$$W.CA + W'.GC = P.CX \quad \dots \quad (२).$$

समीकरण (२) से (१) घटा कर,

$$W.CA = P.OX.$$

$$\therefore OX = \frac{W}{P} \cdot CA \quad \dots \quad (३).$$

अब मान लो  $W = P$ , तो (३) से  $OX = CA$ .

अतः यदि हम  $O$  से दूरी  $OX_1 (=CA)$  नापें और बिन्दु  $X_1$  पर १ अंकित कर दें, तो जब सरकने वाला भार यहाँ ठहरता है तो पलड़े में पिंड का भार  $P$  पौं० होगा।

अब मान लो  $W = 2P$ , तो (३) से  $OX = 2CA$ .

अतः  $O$  से दूरी  $2CA$  नापो और उसके सिरे पर २ अंकित कर दो। इसी प्रकार मान लो  $W = 3P$ , तो (३) से  $OX = 3CA$ ; अतः  $O$  से  $3CA$  के बराबर दूरी नाप कर ३ अंकित कर दो।

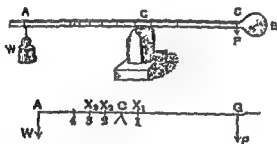
अतः विषम-भुज तुला को अंशांकित करने के लिये  $O$  से क्रमानुसार दूरियाँ  $CA, 2CA, 3CA, \dots$  नाप कर उनके सिरों पर अंक १, २, ३, ... लिख दो। बीच का स्थान  $P$  पौं० की भिन्नों को प्रदर्शित करने के लिये प्रविभाजित किया जा सकता है।

यदि सरकने वाला भार १ पौंड है तो बिन्दु पीडों को प्रदर्शित करेंगे।

उपसाम्य। चूँकि उत्तरोत्तर बिन्दुओं के बीच की दूरियाँ बराबर हैं, इसलिये आलम्ब से अंशांकित बिन्दुओं की दूरियाँ समान्तर श्रेणी में होंगी जिसका पदान्तर आलम्ब और उस बिन्दु के बीच की दूरी है जिससे तौलने वाला पिंड लटकाया जाता है।

१७३—जब मशीन का गुरुत्व-केन्द्र  $G$  बड़ी भुजा में होता है तो बिन्दु  $O$  जिससे अंशांकित चिन्ह नापे जाते हैं छोटी भुजा में होता है। इसका भी सिद्धान्त वही है जो पहले था केवल इतना अन्तर रहता है कि इस स्थिति में हमें समीकरण (१) और (२) को जोड़ना होता है।

१७४—डेनी विषम-भुज तुला में  $AB$  एक दंड होता है जिसके सिरे पर एक भारी गोल अथवा गोल  $B$  होता है।  $A$  पर एक कटिया अथवा पलड़ा लगा होता है जिसमें नीलने वाली वस्तु रखी जाती है।



पिंड का भार दंड के उस बिन्दु को देख कर निकाला जाता है जिस पर मशीन समतुलित होती है।

[यह बट्टया डोरी का एक फंदा डाल कर किया जा सकता है, जो दंड पर सरक सके और यह भालूम किया जाता है कि समतुलित अवस्था के लिये फंदा कहाँ होगा।]

१७५—डेनी विषमभुज तुला को अंशांकित करना। मान लो दंड और पलड़ों का भार  $P$  है और  $G$  उनका गुरुत्व-केन्द्र है। जब एक पिंड जिसका भार  $W$  है पलड़े में रखा हो तो मान लो  $C$  आलम्ब का स्थान है।  $C$  पर घूर्ण लेकर,

$$AC.W = CG.P = (AG - AC).P.$$

$$\therefore AC(P + W) = P.AG.$$

$$\therefore AC = \frac{P}{P + W} . AG \quad \dots \quad (१)$$

अब मान लो  $W=P$ , तो  $AC=\frac{1}{2}AG$ .

अतः  $AG$  को समविभाजित करो और उसके मध्य-बिन्दु  $X_1$  पर 1 अंकित कर दो ; जब विषम-भुज तुला इस बिन्दु पर समतुलित होती है तो पलड़े में रखे हुये पिंड का भार  $P$  होता है ।

अब मान लो  $W=2P$ , तो  $AC=\frac{1}{3}AG$ .

$A$  से  $\frac{1}{3}AG$  के बराबर दूरी पर एक बिन्दु लो और उस पर 2 अंकित कर दो ।

इसी प्रकार मान लो  $W$  क्रमानुसार  $3P, 4P$  के बराबर हैं ; (1) से  $AC$  के संगत मान क्रम में  $\frac{1}{4}AG, \frac{1}{5}AG, \dots$  हैं । दंड पर  $A$  से इन दूरियों पर बिन्दु लेकर 3, 4, ... अंकित कर दो ।

अन्त में, मान लो  $W=\frac{1}{2}P$ , तो (1) से  $AC=\frac{2}{3}AG$ , और मान लो  $W=\frac{1}{3}P$ , तो (1) से  $AC=\frac{3}{4}AG$ .

$A$  से वे बिन्दु लो जिनकी दूरियाँ  $\frac{2}{3}AG, \frac{3}{4}AG, \frac{4}{5}AG, \dots$  हैं और उन पर  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  अंकित कर दो ।

हम देखते हैं कि  $G$  का स्थान आसानी से निकाला जा सकता है, क्योंकि यही आलम्ब का वह स्थान है जहाँ विषम-भुज तुला पलड़े में बिना किसी भार के समतुलित अवस्था में रहती है ।

उपसाध्य । चूँकि  $AX_1, AX_2, AX_3, \dots$  संख्या 2, 3, 4 ... के क्रमानु-  
पाती हैं, इसलिये वे हरात्मक श्रेणी में हैं, अतः पलड़े से अंशांकित बिन्दुओं की दूरियाँ ( तौली जानेवाली वस्तु की बराबर वृद्धि के संगत ) हरात्मक श्रेणी में हैं ।

उदाहरण । एक डेनी विषम-भुज तुला का भार 6 पो० है, और पलड़े से उसके गुह्य-केन्द्र की दूरी 3 फुट है ; आलम्ब से उत्तरोत्तर अंशांकित बिन्दुओं की दूरियाँ मालूम करो ।

पिछली धारा के संकेत से  $P=6$ , और  $AG=3$  फुट ।

$$\therefore AC = \frac{6}{6+11'} \times 3 = \frac{18}{11'+6} \text{ फुट ।}$$

∴ जब  $W=1$ ,  $AX_1=1\frac{8}{7}=2\frac{1}{7}$  फुट,

जब  $W=2$ ,  $AX_2=1\frac{8}{8}=2\frac{1}{8}$  फुट,

जब  $W=3$ ,  $AX_3=1\frac{8}{9}=2$  फुट,

.....

जब  $W=\frac{1}{2}$ ,  $AX_{\frac{1}{2}}=\frac{18}{\frac{1}{2}+6}=2\frac{10}{13}$  फुट, इत्यादि ।

इनसे दृष्ट अंशांकित बिन्दु मालूम हो जाते हैं ।

### उदाहरणमाला २६

१ । एक साधारण विषम-भुज तुला का भार 10 पौ० है ; भार आलम्ब से 4 इंच को दूरी पर एक बिन्दु से लटकाया गया है, और तुला का गुस्त्व-केन्द्र आलम्ब के दूसरी ओर 3 इंच दूरी पर है ; सरकने वाला भार 12 पौ० है , बताओ ! हण्डरवेट का अंशांकित बिन्दु कहाँ होगा ।

२ । एक भारी दंड से, जिसकी लम्बाई 14½ इंच और भार 3 पौ० है और जिसका गुस्त्व-केन्द्र भारी सिरे से 1½ इंच है, एक विषमभुज तुला का काम लिया जा रहा है । सरकने वाला भार 2 पौ० है । बताओ आलम्ब कहाँ रखा जाय कि वह 12 पौ० तक तौल सके और उन अंशांकित बिन्दुओं के बीच में जो पीछे की प्रदर्शित करते हैं क्या दूरी होगी ?

३ । एक विषम-भुज तुला में जिसमें आलम्ब की दूरी भार के लटकने वाले बिन्दु से एक इंच है और सरकने वाला भार 6 ओंस है, 15 पौ० के भार को तौलने के लिये आलम्ब से 8 इंच की दूरी पर रखना पड़ता है । बताओ 24 पौ० तौलने के लिये उसे कहाँ रखना पड़ेगा ।

४ । आलम्ब को दूरी उस बिन्दु से जिस पर तौलने वाले सामान लटकाने जाते हैं 1½ इंच है और वह दंड के गुस्त्व-केन्द्र से 2 इंच है । दंड का भार 3 पौ० है और उसपर सरकने वाला भार 2 पौ० का है । बताओ

उत्तरोत्तर पौडों को प्रदर्शित करने वाले अंशांकित चिन्ह कितनी कितनी दूरी पर हैं, और वह सबसे छोटा कौन सा भार है जो तौला जा सकता है।

५। एक 4 फुट लम्बी विषम-भुज तुला  $AB$  का गुरुत्व-केन्द्र  $A$  से 11 इंच है और उसका आलम्ब  $A$  से 8 इंच दूर है। यदि तुला का भार 4 पौ० है, और सरकने वाला भार 3 पौ० है, तो बताओ  $B$  से कितने इंच पर 15 पौ० को प्रदर्शित करने वाला अंशांकित चिन्ह होगा।

६। एक 2 फुट लम्बे सम दंड  $AB$  को, जिसका भार 3 पौ० है, एक विषम-भुज तुला के काम में लाया जा रहा है। वह  $A$  से 4 इंच की दूरी पर एक बिन्दु से रुका हुआ है। बताओ 2 पौ० के सरकने वाले भार से बड़े से बड़ा कौन सा भार तौला जा सकता है, और वह बिन्दु भी मालूम करो जहाँ से अंशांकित चिन्ह नापे जाते हैं।

७। एक सम दंड को 20 बराबर भागों में विभाजित किया गया है, और आलम्ब पहले अंशांकित चिन्ह पर है। बड़े से बड़ा और छोटे से छोटा भार जो इस मशीन से तौला जा सकता है 20 और 2 पौ० हैं। मशीन का भार और सरकने वाले भार का परिमाण मालूम करो।

८। 2 फुट लम्बे और 3 पौ० भारी एक सम दंड से एक विषम-भुज तुला का काम लिया जा सकता है, जिसका आलम्ब एक सिरे से 2 इंच की दूरी पर है और सरकने वाला भार 1 पौ० है। बताओ बड़े से बड़ा और छोटे से छोटा कौन सा भार इस मशीन से तौला जा सकता है। 20 पौ० को प्रदर्शित करने के लिये सरकने वाला भार कहाँ पर होगा?

९। एक विषम-भुज तुला की छड़ 33 इंच लम्बी है। भार के लटकने के बिन्दु से आलम्ब 4 इंच और छड़ का गुरुत्व-केन्द्र  $5\frac{1}{2}$  इंच है। यदि छड़ का भार 6 पौ० है और सबसे बड़ा भार जो तौला जा सकता है वह 24 पौ० है, तो सरकने वाले भार का परिमाण मालूम करो।

१०। एक विषम-भुज तुला 3 फुट लम्बी और 2½ पौ० भारी छड़ से बनी हुई है। उसका आलम्ब एक सिरे से 4 इंच पर है। यदि सरकने वाला भार 1 पौ० है तो वह बड़े से बड़ा और छोटे से छोटा भार मालूम करो जो

इस तुला से तोला जा सके और अंशांकित चिन्हों के बीच की दूरी भी मालूम करो यदि वे पौंडों को प्रदर्शित करते हों ।

११। एक साधारण विषम-भुज तुला, जो एक सम दंड का बना हुआ है, 40 इंच लम्बा है । दंड का भार सरकने वाले भार के बराबर है, और बड़े से बड़ा भार जो उससे तोला जा सकता है सरकने वाले भार से चार गुना है । आलम्ब का स्थान मालूम करो ।

१२। एक डेनी विषम-भुज तुला में शून्य चिन्ह और तुला के सिरे के बीच की दूरी 20 बराबर भागों में विभाजित है और बड़े से बड़ा भार जो उससे तोला जा सकता है, 3 पौ० 9 औ० है । तुला का भार मालूम करो ।

१३। उस डेनी विषम-भुज तुला की अंशांकित भुजा की लम्बाई मालूम करो जिसका भार 1 पौ० है और जिसमें 4 और 5 पौ० को प्रदर्शित करने वाले चिन्हों के बीच की दूरी एक इंच है ।

१४। एक डेनी विषम-भुज तुला में आलम्ब पहले और दूसरे अंशांकित चिन्हों के बीचोबीच है । सिद्ध करो कि पलड़े में रखता हुआ भार तुला के भार का  $\frac{1}{2}$  है ।

१५। यदि एक विषम भुज तुला का भार घिस कर आधा रह जाय और उसकी लम्बाई और गुरुत्व-केन्द्र के स्थान में कोई परिवर्तन न हों, तो बताओ उसमें क्या संशोधन किने जायें कि उससे भार ठीक ठीक तोले जा सकें, यदि आरम्भ में आलम्ब से शून्य चिन्ह की दूरी उत्तरोत्तर अंशांकित चिन्हों के बीच की दूरी की एक तिहाई थी और यदि सरकने वाला भार एक पौंड हो ।

१६। प्रयोग से एक विषम-भुज तुला का भार  $\frac{1}{10}$  कम हो गया है परन्तु उसके गुरुत्व-केन्द्र के स्थान में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है । बताओ उसके अंशांकित चिन्हों को किस प्रकार ठीक किया जा सकता है ।

१७। एक दूकानदार एक विषमभुज तुला के सरकने वाले भार को



बदल देता है, बताओ वह स्वयं अपने आप को अपना अपने ग्राहकों को घोसा देता है ?

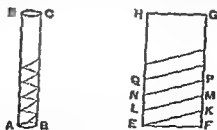
१८। एक तोलने वाली मशीन में जो एक साधारण विषम-भुज तुला के सिद्धान्त पर बनी हुई है, पौडो को ० से १४ पौं० तक के अंशांकित चिन्हों से और स्टोनों को भुजा के अन्त में लटके हुये भार से पढ़ने है। यदि एक स्टोन को तोलने के लिये ७ औंस होते हैं, सरकने वाला भार  $\frac{1}{2}$  पौं० है, और आलम्ब से भुजा की लम्बाई १ फुट है, तो सिद्ध करो कि उत्तरांतर अंशांकित चिन्हों के बीच की दूरी  $\frac{1}{2}$  इंच है।

१९। एक तोलने वाली मशीन इस प्रकार बनी हुई है कि पलड़े में रखे हुये प्रत्येक पूर्ण स्टोन के लिये भुजा के अन्त में  $m$  औंस का अधिक भार रखना पड़ता है। आलम्ब से भुजा की लम्बाई एक फुट है और पलड़े में रखे हुये अन्य पौड भुज पर सरकने वाले  $n$  औंस के भार से नापे जाते हैं। सिद्ध करो कि उत्तरांतर पौडो के लिये अंशांकित चिन्हों के बीच की दूरी  $\frac{6m}{7n}$  इंच होगी और आलम्ब से भार के लटकने के बिन्दु की दूरी  $\frac{3m}{56}$  इंच होगी।

### (ज) पेंच (स्क्रू)

१७६—पेंच (स्क्रू) में धातु का एक बेलन होता है जिसके बाहरी पृष्ठ पर चारों ओर बहिर्गंत धातु का तागा चक्कर लगाता है।

मान लो  $ABCD$  एक ठोस बेलन है और  $EFGH$  एक आयत है, जिसका



आधार  $EF$  ठोस बेलन की परिधि के बराबर है।  $EH$  और  $FG$  पर बिन्दु

$L, N, Q, \dots$  और  $K, M, P, \dots$  इस प्रकार लें कि  $EL, LA, \dots$   
 $FK, KM, MP, \dots$  बराबर हों।  $EK, LM, NP, \dots$  को निला दो।

आमत को बेलन के चारों ओर इस प्रकार लपेटो कि बिन्दु  $E, A$  पर  
 और  $EH$ , रेखा  $AD$  पर पड़े। बेलन के चारों ओर लिपट जाने पर  
 बिन्दु  $F, A$  पर हो बिन्दु  $E$  पर पड़ने लगेगा।

अब रेखायें  $EK, LM, NP, \dots$  बेलन के पृष्ठ पर एक सतत सॉपल रेखा  
 हो जायगी और यदि हम इस रेखा पर धातु को बाहर निकाला हुआ  
 समझें तो यह पेंच (स्कू) की चूड़ी हो जाती है।

रचना से यह स्पष्ट है कि चूड़ी बेलन के चारों ओर घुंकाव लगाती  
 हुई एक आनत तल होती है, और उसका क्षैतिज से झुकाव हर जगह एक  
 ही रहता है और कोण  $KEF$  के बराबर होता है। इस कोण को प्रायः  
 पेंच का कोण कहते हैं, और यदि अक्ष के समानान्तर नापें तो दो क्रमागत  
 चूड़ियों के बीच की दूरी को पेंच का पिच कहते हैं।

यह स्पष्ट है कि  $FK$  पेंच की दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी  
 के बराबर है, और  $EF$  बेलन की परिधि के बराबर है जिसके चारों ओर  
 चूड़ी खींची हुई है।

$$\therefore \text{स्पज्या (पेंच का कोण)} = \frac{FK}{EF}$$

पेंच का पिच

— उस वृत्त की परिधि जिसकी त्रिज्या अक्ष के पेंच से किसी बिन्दु की दूरी है।

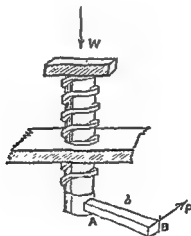
पेंच की चूड़ी के परिच्छेद के भिन्न भिन्न रूप होते हैं। हम केवल  
 उसी परिच्छेद पर विचार करेंगे जो आयताकार होता है।

१७७—पेंच बहुधा एक नियत आलम्बन पर कार्य करता है, जिसके  
 भीतरी ओर उसी बनावट का जैसी कि पेंच की चूड़ी है, एक गड्ढा खुदता  
 जाता है जिसके किनारे किनारे चूड़ी सरकती जाती है। पेंच के लिये केवल  
 अपने अक्ष के चारों ओर घूमते हुये अपनी लम्बाई की समानान्तर दिशा में  
 ही आगे बढ़ने की गुंजाइश रहती है।

यदि पेंच को मोड़ा खड़ा रखा जाय और उसके ऊपर एक भार रख दिया जाय तो पेंच चारों ओर घूमता हुआ नीचे उतरेगा क्योंकि पेंच और उसके आलम्बन के बीच में कोई घर्षण नहीं माना जाता है। अतः यदि पेंच समतुलित अवस्था में रखा जाय तो उस पर किसी बल को लगाना पड़ेगा; इस बल को बहुधा उस क्षैतिज भुजा के एक सिरे पर लगाते हैं जिसका दूसरा सिरा दुकाना पूर्वक पेंच में लगा होता है।

१७८—एक चिकने पेंच में, सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

मान लो पेंच के अक्ष से चूड़ी के किसी बिन्दु की दूरी  $a$  है और उम बिन्दु की दूरी,  $AB$ , जिस पर सामर्थ्य लगाया गया है,  $b$  है।

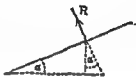


पेंच, सामर्थ्य  $P$ , भार  $W$  और उन बिन्दुओं पर प्रतिबलों से जिन पर नियत आलम्बन पेंच की चूड़ियों को स्पर्श करता है, समतुलित है। मान लो पेंच की चूड़ियों के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर आलम्बन के प्रतिबल  $R, S, T, \dots$  हैं। क्योंकि पेंच की चूड़ी चिकनी है इसलिये ये सब उस पर रश्म्व होंगे।

मान लो पंच की चूड़ी का क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है। इसलिये प्रतिबल  $R$  के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अवयव बल क्रमसे  $R \cos \alpha$  और  $R \sin \alpha$  हैं।

इसी प्रकार से हम  $S, T, \dots$  को विश्लेषित कर सकते हैं।

अतः आलम्बन के प्रतिबल ऊर्ध्वाधर दिशा में  $R \sin \alpha, S \sin \alpha, T \sin \alpha, \dots$  और क्षैतिज दिशा में  $R \cos \alpha, S \cos \alpha, T \cos \alpha, \dots$  के बराबर होंगे। ये सभी पिछले बल पंच के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर उसके अक्ष से समान दूरी पर कार्य करते हैं; इनका प्रभाव पंच को  $P$  की दिशा के विपरीत दिशा में घुमाने का होता है।



ऊर्ध्वाधर बलों को बराबर रखने पर

$$W = R \sin \alpha + S \sin \alpha + \dots = (R + S + T + \dots) \sin \alpha \quad (1)$$

पंच के अक्ष पर घूर्ण लेने पर, धारा १३ से,

$$P \cdot b = R \sin \alpha \cdot a + S \sin \alpha \cdot a + T \sin \alpha \cdot a + \dots$$

$$= a \sin \alpha (R + S + T + \dots) \quad \dots \quad (2)$$

समीकरण (१) और (२) से, भाग देने पर

$$\frac{P \cdot b}{W} = \frac{a \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\therefore \frac{P}{W} = \frac{a \sin \alpha}{b} = \frac{2\pi a \sin \alpha}{2\pi b}$$

परन्तु धारा १७६ से,

$2\pi a \sin \alpha$  = दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी = पंच का पिच।

और  $2\pi b$  = शक्ति-भुजा के सिरे  $B$  से खींचे गये वृत्त की परिधि।

$$\text{अतः यांत्रिक लाभ} = \frac{W}{P} = \frac{2\pi b}{2\pi a \sin \alpha}$$

= उस वृत्त की परिधि जिसकी त्रिज्या सामर्थ्य-भुजा है  
पंच की दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी

कर्म के सिद्धान्त की जाँच।

शक्ति-भुजा की प्रत्येक परिक्रमा में पेंच अनन्त दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी उठ जाता है।

अतः प्रत्येक परिक्रमा में सामर्थ्य द्वारा किया गया कर्म

$= P \times$  शक्ति-भुजा के सिरे से खींचे गये वृत्त की परिधि,

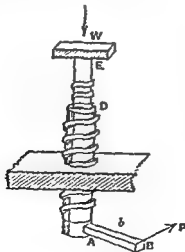
और भार के विपरीत किया गया कर्म

$= W \times$  दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी।

यह उस सम्बन्ध से जो अभी मिट्ट किया जा चुका है बराबर है।

\*१७९—पेंच की चूड़ियों के बीच की दूरी घटा कर उसका यांत्रिक लाभ सैद्धान्तिक रूप से मनचाहा बढ़ाया जा सकता है, परन्तु व्यवहार में यह असम्भव है, क्योंकि यदि हम चूड़ियों के बीच की दूरी को बहुत अधिक घटा दें तो उनमें दबाव को सम्हालने की सामर्थ्य न रहेगी।

हस्टर के अन्तरीय पेंच में यह कठिनाई दूर की जा सकती है।



इस मशीन में एक पेंच  $AD$  होता है जो एक नियत आलम्बन में कार्य करता है। इस पेंच के भीतर का भाग मोड़ला होता है और उसमें एक छोटे

पेंच  $DE$  को भीतर जाने देने के लिये नाली खुदी होती है। पेंच  $DE$  एक गुटके में  $E$  पर इस प्रकार लगा होता है कि वह घूम नहीं सकता है परन्तु केवल अपनी लम्बाई की दिशा में ही हट सकता है।

जब सामर्थ्य-भुजा  $AB$  एक परिक्रमा कर लेती है तो पेंच  $AD$  दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी आगे बढ़ जाता है और साथ ही साथ छोटा पेंच  $DA$  के भीतर अपनी दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी भी चला जाता है। अतः छोटा पेंच और इसलिये भार भी इन दोनों दूरियों के अन्तर के बराबर आगे बढ़ता है।

समतुलित अवस्था में मान लो कि बड़े पेंच और उसके आलम्बन के बीच में प्रतिबल  $R, S, T, \dots$  हैं और भीतरी और बाहरी पेंचों के बीच में प्रतिबल  $R', S', T', \dots$  हैं; और मान लो कि  $a$  और  $a'$  त्रिज्याएँ तथा  $\alpha$  और  $\alpha'$  पेंच के कोण हैं।

पिछली धारा की भाँति चूँकि बाहरी पेंच समतुलित अवस्था में है, इसलिये  $P.b = (R + S + T + \dots)$  ज्या  $\alpha$  —  $(R' + S' + \dots)$  ज्या  $\alpha' \dots \dots (1)$ , और  $(R + S + T + \dots)$  को ज्या  $\alpha = (R' + S' + \dots)$  को ज्या  $\alpha' \dots \dots (2)$ .

और चूँकि भीतरी पेंच भी समतुलित अवस्था में है, इसलिये

$$W = (R' + S' + T' + \dots) \text{ को ज्या } \alpha' \dots \dots \dots (3).$$

(२) और (३) से,

$$R' + S' + \dots = \frac{W}{\text{को ज्या } \alpha'}, \text{ और } R + S + \dots = \frac{W}{\text{को ज्या } \alpha}.$$

अतः (१) से,  $P.b = W a$  स्पज्या  $\alpha$  —  $W.a'$  स्पज्या  $\alpha'$ .

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{2\pi b}{2\pi a \text{ स्पज्या } \alpha - 2\pi a' \text{ स्पज्या } \alpha'}$$

शक्ति-भुजा के सिरे से खींचे गये वृत्त की परिधि  
दोनों पेंचों के बीच की दूरी

दोनों पेंचों के पिचों की लगभग बराबर बनाकर हम, मशीन को बिना कमजोर किये हुये ही, यांत्रिक लाभ को बहुत अधिक कर सकते हैं।

कर्म के सिद्धान्त की सत्यता इस अवस्था में भी देखी जा सकती है, क्योंकि इस अवस्था में भार दोनों पेचों के बीच की दूरियों के अन्तर के चरावर उठता है ।

### उदाहरणमाला ३०

१ । बताओ एक चिकना ऊर्ध्वाधर पेच जिसका पिच  $1\frac{1}{2}$  इंच है कितना भार उठा सकता है यदि सामर्थ्य 25 पौं० भार है और  $3\frac{1}{2}$  फुट लम्बी भुजा के सिरे पर कार्य करती है ।

२ । उस पेच को शक्ति-भुजा की लम्बाई बया होनी चाहिये जिसकी एक इंच में 6 चूड़ियाँ हैं ताकि यांत्रिक लाभ 216 हो जाय ?

३ । 18 इंच लम्बी भुजा के सिरे पर लगाया गया कौनसा बल एक पेच के शिखर पर 1100 पौ० का दबाव डालेगा जब 7 परिक्रमाओं में पेच एक इंच का  $\frac{1}{2}$  भाग उठ जाता है ?

४ । एक पेच जिसका पिच  $\frac{1}{2}$  इंच है एक 4 फुट लम्बे लीवर से घुमाया जा रहा है ; बताओ कौनसा बल 15 हण्डरेट के भार को उठायेगा ।

५ । एक जैक-स्कू की भुजा एक गज लम्बी है, और पेच के एक इंच में दो चूड़ियाँ हैं । एक टन भार उठाने के लिये भुजा के सिरे पर कौनसा बल लगाना चाहिये ?

६ । उस पेच से, जिसके एक इंच में 4 चूड़ियाँ हैं, कितना दबाव पड़ना है, जब 50 पौं० भार का एक बल 2 फुट लम्बी भुजा के सिरे पर लगाया जाता है ।

७ । उस पेच से, जिसकी भुजा 2 फुट लम्बी है और जिसकी एक फुट लम्बाई में 10 चूड़ियाँ हैं, कितना दबाव पड़ेगा जब सामर्थ्य 112 पौं० भार का बल है ?

८ । यदि सामर्थ्य 1 फुट लम्बी भुजा के सिरे पर लगाई जाय, और यदि पेच एक फुट लम्बाई में सात पूरी परिक्रमा करे, तो बताओ एक टन भार के समझालने में कितनी सामर्थ्य लगानी पड़ेगी ।

९। यदि उस लीवर की लम्बाई जिससे पेंच चलाया जाता है 6 फुट है, तो पेंच की दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी मालूम करो ताकि लीवर के प्रत्येक सिरे पर 10 पौ० भार की सामर्थ्य पेंच के शिखर पर 1000 पौ० भार का दबाव डाले।

१०। उस अन्तरीय पेंच में यांत्रिक लाभ मालूम करो जिसके एक इंच में 5 और 6 चूड़ियाँ हैं, और जिसमें 4 फुट व्यास के एक पहिये की परिधि पर सामर्थ्य लगाई जाती है।

११। उस अन्तरीय पेंच में यांत्रिक लाभ मालूम करो, जिसके बड़े पेंच में एक इंच में 8 और छोटे में 9 चूड़ियाँ हैं और जिसकी शक्ति-भुजा की लम्बाई एक फुट है।

१२। यदि एक पेंच का अक्ष ऊर्ध्वाधर है और उसकी चूड़ियों के बीच की दूरी 2 इंच है, और 100 पौ० भार का एक दरवाजा पेंच में फब्बे के रूप में लगा हुआ है, तो बताओ दरवाजे की एक समकोण घुमाने में कितना कर्म करना पड़ेगा।

१३। सिद्ध करो कि एक रस्सी का तनाव 9 टन भार के बराबर है यदि उसे एक ठिक पेंच के जिसके दायें पेंच में एक इंच में 5 चूड़ियाँ और बायें पेंच में एक इंच में 6 चूड़ियाँ हैं, 2 फुट लम्बे लीवर पर 49 पौ० के बल से लगाया जाय।

[चूँकि पेंच की एक पूरी परिक्रमा में उसके सिरे  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  इंच निकट आ जाते हैं, इसलिये कर्म के सिद्धान्त से

$$T \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \times 1\frac{1}{2} = 49 \times 2\pi \cdot 2,$$

जहाँ पर  $T$  पौ० भार में रस्सी का तनाव है।]



## अध्याय १३

### घर्षण

#### (Friction)

१८०—धारा २० में हमने चिकने पिंडों की परिभाषा दी है कि यदि वे एक दूसरे को स्पर्श करें तो उनका प्रतिबल स्पर्श-बिन्दु पर उन दोनों के पृष्ठों पर लम्ब होता है। इसलिये चिकने पिंडों में कोई ऐसा बल नहीं होता जो एक पिंड को दूसरे के ऊपर फिसलने में रोके। यदि एक पूर्णतया चिकना पिंड एक पूर्णतया चिकने आनत तल पर रखा जाय, तो क्योंकि पिंड और तल के बीच में कोई ऐसा प्रतिबल नहीं होता जो पिंड को तल से फिसलने में रोकता हो इसलिये पिंड तल पर समतुलित नहीं रहेगा जबतक कि उसपर कोई बाह्य बल न लगाया जाय।

वास्तव में कोई ऐसे पिंड नहीं है जो पूर्णतया चिकने हों; दो स्पर्श करने वाले पिंडों में हमेशा कोई न कोई ऐसा बल अवश्य होता है जो एक पिंड को दूसरे से फिसलने में रोके। ऐसे बल को घर्षण-बल कहते हैं।

घर्षण। परिभाषा। यदि दो पिंड एक दूसरे को स्पर्श करते हों, तो पिंडों का वह गुण, जिसके कारण उनके स्पर्श-बिन्दु पर एक ऐसा बल कार्य करना है जो एक पिंड को दूसरे से फिसलने में रोकता है, घर्षण कहलाता है, और इस बल को घर्षण-बल कहते हैं।

१८१—घर्षण स्वयं-सम्पूर्ण बल है; कभी भी गति को रोकने के लिये आवश्यक से अधिक घर्षण पैदा नहीं होता है।

मान लो समतल आधार की लोहे की एक भारी पटिया एक क्षैतिज मेज पर रखी हुई है। यदि हम पटिया के किसी बिन्दु से एक डोरी बांधें और पटिया के मुख्य-केन्द्र की क्षैतिज दिशा में उसे खींचें, तो उसके हटाने में हमें एक प्रतिरोध का अनुभव होता है और वह ठीक उस बल के बराबर होता है जिसका प्रयोग हम पिंड पर करते हैं।

यदि हम खींचना बन्द कर दे तो घर्षण-बल भी कार्य करना बन्द कर देगा, क्योंकि यदि घर्षण-बल कार्य करना न बन्द करे तो पिंड चलने लगता।

परन्तु घर्षण, जो दो पिंडों में कार्य करता है, असीमित नहीं होता है। यदि हम उस बल को बराबर बढ़ाते जायें जिसका हम पटिया पर प्रयोग कर रहे हैं तो हम देखेंगे कि अन्त में घर्षण इस बल को पराजित करने में असमर्थ हो जाता है और पिंड चलने लगता है।

१८१—घर्षण साधारण जीवन की यात्रिक समस्याओं में बड़ा भारी कार्य करता है। यदि हमारे जूतों और भूमि के बीच घर्षण न हो तो हम चल नहीं सकते। यदि मोड़ी और भूमि के बीच में घर्षण न हो तो सीढ़ी रुक नहीं सकती जबतक कि उसे ऊर्ध्वाधर से किसी झुकाव पर न रोका जाय। बिना घर्षण के कील और पेंच लकड़ी के अन्दर ठहर नहीं सकते और न इंजन रेल को खींच ही सकता है।

१८२—स्थिति सम्बन्धी घर्षण के नियम निम्नलिखित हैं।

पहला नियम। जब दो पिंड एक दूसरे को स्पर्श करते हैं, तो उनमें से एक के घर्षण की दिशा स्पर्श-बिन्दु पर उस दिशा के विपरीत होती है जिस दिशा में स्पर्श-बिन्दु चलना आरम्भ करता है।

दूसरा नियम। समतुलित अवस्था में घर्षण का परिमाण इतना होता है कि वह पिंड को चलने से ठीक रोक सके।

१८४—मान लो धारा १५६ की पहली स्थिति में धरातल स्थ है, और पिंड एक बल द्वारा रोके जाने के बजाय स्वतंत्रतापूर्वक धरातल पर रखा हुआ है। इस स्थिति में बल  $P$  घर्षण में बदल जायगा जो  $W \sin \alpha$  के बराबर है।

उदाहरण १। वताओ (१) एक गाड़ी के पहिये में, और (२) एक आदमी के पैर में जो चल रहा है, घर्षण-बल किस दिशा में कार्य करता है।

उदाहरण २। 30 पौं० भार का पिंड एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है, और उस पर 10 पौं० भार के बराबर एक बल क्षैतिज से  $30^\circ$  का कोण बनाता हुआ कार्य करता है। सिद्ध करो कि घर्षण-बल लगभग 8.66 पौं० भार के बराबर है।

उदाहरण ३। रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखे हुये एक पिंड पर क्रमशः 7 और 8 पौं० भार के दो क्षैतिज बल एक दूसरे से  $60^\circ$  का कोण बनाते हुये कार्य करते हैं। सिद्ध करो कि घर्षण-बल 13 पौं० भार के बराबर है और पहले बल से ज्या  $^{-1} \frac{4\sqrt{3}}{13}$  का कोण बनाता है।

उदाहरण ४। 40 पौं० भार का पिंड एक रूक्ष आनत तल पर रखा हुआ है जो क्षैतिज से  $30^\circ$  का कोण बनाता है, और (१) 14 पौं० भार के एक बल से जो धरातल के ठीक ऊपर की ओर कार्य करता है, (२) 25 पौं० भार के एक बल से जो धरातल के ठीक ऊपर की ओर कार्य करता है, (३) 20 पौं० के एक क्षैतिज बल से, (४) 30 पौं० भार के एक बल से जो धरातल से  $30^\circ$  का कोण बनाता है, रखा हुआ है। प्रत्येक अवस्था में घर्षण-बल मालूम करो।

उत्तर : (१) 6 पौं० भार धरातल के ऊपर की ओर ; (२) 5 पौं० भार धरातल के नीचे की ओर ; (३) 2.68 पौं० भार धरातल के ऊपर की ओर ; (४) 5.98 पौं० भार धरातल के नीचे की ओर।

१८५--उपर्युक्त नियम व्यापक रूप से भय है, परन्तु जो घर्षण प्रयोग में आ सकता है वह सीमित होता है और कभी कभी संस्थिति नष्ट होने की सीमा पर आ जाती है और गति आरम्भ हो जाती है।

सीमान्त घर्षण। परिभाषा। जब कोई पिंड दूसरे पिंड पर फिसलने वाला होता है तो संस्थिति सीमान्त कहलाती है, और जिस घर्षण का प्रयोग होता है उसे सीमान्त घर्षण कहते हैं।

१८६—सीमान्त घर्षण की दिशा पहले नियम से ज्ञात हो जाती है ।  
(धारा १८३) ।

सीमान्त घर्षण का परिमाण निम्नलिखित तीन नियमों से निकल आता है ।

**तीसरा नियम ।** सीमान्त घर्षण के परिमाण की अभिलम्ब प्रतिबल से अचर निम्पत्ति होती है और यह निम्पत्ति पिंडों के पदार्थों पर निर्भर होती है ।

**चौथा नियम ।** सीमान्त घर्षण स्पर्श करते हुये पृष्ठों के आकार और रूप पर उस समय तक निर्भर नहीं रहता जब तक कि अभिलम्ब प्रतिबल में कोई परिवर्तन न हो ।

**पाँचवाँ नियम ।** जब एक पिंड के दूसरे पिंड पर फिसलने से गति आरम्भ हो जाती है, तो घर्षण की दिशा गति की दिशा के विपरीत होती है । घर्षण का परिमाण दोगे पर निर्भर नहीं रहता, परन्तु घर्षण और अभिलम्ब प्रतिबल की निम्पत्ति उस अवस्था से कुछ कम होती है जब पिंड समतुलित अवस्था में ठीक गति की सीमा पर होता है ।

ऊपर के नियम प्रयोगात्मक हैं । इन्हें विल्कुल सही तो नहीं मान सकते, यद्यपि वे साधारण अवस्था में बहुत कुछ सही फल देते हैं ।

उदाहरणार्थ, यदि एक पिंड की दूसरे पिंड पर इतना दबाये कि स्पर्श करते हुये पृष्ठ कुचल जाने की सीमा पर पहुँच जायें तो ऐसी अवस्था में तीसरा नियम सही नहीं रह जाता और घर्षण अभिलम्ब प्रतिबल की अपेक्षा अधिक बढ़ जाता है ।

१८७—घर्षण-गुणक । सीमान्त घर्षण और अभिलम्ब प्रतिबल के बीच की स्थिर निम्पत्ति को घर्षण-गुणक कहते हैं । इसे प्रायः  $\mu$  में प्रदर्शित करते हैं ; अतः यदि दो पिंडों के बीच संस्थिति नष्ट होने की सीमा पर हो और उस समय यदि  $F$  घर्षण और  $R$  अभिलम्ब प्रतिबल हो, तो  $\frac{F}{R} = \mu$ , अर्थात्  $F \approx \mu R$ .

स्पर्श करते हुये पदार्थों के भिन्न भिन्न जोड़ों के लिये  $\mu$  के मान भिन्न भिन्न होते हैं ; पदार्थों के ऐसे जोड़े अभी तक ज्ञात नहीं हुये हैं जिनके लिये घर्षण-गुणक इकाई के बराबर हों ।

१८८—घर्षण के नियमों की प्रयोग द्वारा जाँच करना ।

पहला प्रयोग । लकड़ी (A) का एक बड़ा एवं चिकना तख्ता लो और उसको इस प्रकार कस दो कि वह क्षैतिज हो जाय । एक दूसरी लकड़ी (B) का टुकड़ा लो जो सरकने वाले टुकड़े का काम करे और उसे यथा-सम्भव चिकना कर लो । B से एक हल्की डोरी बांधो और तख्ते A के सिरे पर लगी हुई एक विरनी के ऊपर से डोरी को लेजाकर उसके दूसरे सिरे पर पलड़ा बाँध दो ।



विरनी को इस प्रकार रखा कि डोरी का वह भाग जो ऊर्ध्वाधर नहीं है क्षैतिज हो । सरकने वाले टुकड़े के ऊपर एक शत भार R रखो, और पलड़े में ऐसे शत भार F रखो कि यह टुकड़ा ठीक फिसलने की अवस्था में हो जाय । यह दृष्ट भार F बहुत कुछ लगभग नियत तख्ते A को धीरे धीरे खटखटाने से मालूम किया जा सकता है ।

अब दायें विश पर विचार करो ।

मान लो R और सरकने वाले तख्ते का कुल भार  $W$  है और F और पलड़े का भार मिला कर  $W'$  है । क्योंकि सरकने वाला टुकड़ा ठीक फिसलने की अवस्था में है इसलिए उस पर घर्षण  $\mu W$  होगा और डोरी का तनाव  $T, W'$  के बराबर होगा क्योंकि यह पलड़े और F से समतुल्य है ।

सरकने वाले टुकड़े के समतुल्य के लिये

$$\mu W = W'.$$

अब स्लाइडर पर एक दूसरा भार रखा, और सगत भार  $F$  को इस प्रकार ठीक करो कि वह फिर फिसलने की अवस्था में हो जाय, और  $W$  और  $W'$  के नये मानों  $W_1$  और  $W_1'$  पर विचार करो, तो पहले की भाँति मालूम होगा कि

$$\mu = \frac{W_1'}{W_1}$$

इस प्रयोग को फिर मरकने वाले टुकड़े पर भिन्न भिन्न भार रख कर दोहराओ, और  $\frac{W_2'}{W_2}, \frac{W_3'}{W_3}, \dots$  के मान निकालो, तो मालूम होगा कि

$$\frac{W'}{W}, \frac{W_1'}{W_1}, \frac{W_2'}{W_2}, \dots \text{ लगभग बराबर हैं।}$$

अतः तीसरे नियम के पहले भाग, अर्थात्  $\mu$  का मान अभिलम्ब प्रतिबल पर निर्भर नहीं होता, की सत्यता की जाँच हो गई।

**दूसरा प्रयोग।** लकड़ी ( $B$ ) का एक दूसरा टुकड़ा लो जिसका आकार पहले प्रयोग में प्रयोग किये गये टुकड़े से बिल्कुल भिन्न हो। [इसे उमी चिकनी की हुई लकड़ी से काटना चाहिये जिससे पहला टुकड़ा  $B$  लिया गया था।]

इस टुकड़े  $B$  का  $A$  तल से स्पर्श करता हुआ क्षेत्र पहले प्रयोग में लिये गये क्षेत्र से चाहे अधिक हो चाहे कम, बिल्कुल भिन्न होना चाहिये।

पहले प्रयोग को फिर से करो और  $\mu$  का सगत मान मालूम करो। यह मान, प्रयोग की सीमा को ध्यान रखने हुये पहले प्रयोग वाला ही आदेगा परन्तु दोनों प्रयोग में अन्तर केवल इतना ही है कि स्पर्श करने हुये रूख पृष्ठों के क्षेत्र भिन्न भिन्न हैं।

अतः चौथे नियम की सत्यता की जाँच हो गई।

**तिसरा प्रयोग।** पहले से भिन्न प्रकार की लकड़ी ( $C$ ) का एक टुकड़ा लो और उसे भली प्रकार से समतल कर लो। उसमें से भिन्न भिन्न क्षेत्र के टुकड़े काट लो किन्तु जहाँ तक सम्भव हो उनके पृष्ठ एक से रहें।

अब पहला और दूसरा प्रयोग फिर करो और  $\mu$  का मान निकालो।  $\mu$  का यह मान  $\mu$  के उस मान से भिन्न होगा जबकि मरकने वाला

टुकड़ा B लकड़ी का बना हुआ था। अतः तीसरे नियम के दूसरे भाग अर्थात् निष्पत्ति पिंडों के पदार्थों पर निर्भर होता है, की सत्यता की जाँच हो गई।

**चौथा प्रयोग।** पिछले तीन प्रयोगों की फिर से करी परन्तु अब  $F$  को इस प्रकार चुनो कि सरकने वाला टुकड़ा फिसलने की अवस्था के स्थान पर एक स्थिर वेग से चलने लगे, तो पाँचवें नियम की लगभग सत्यता की जाँच हो जायगी।

पिछले प्रयोगों में लकड़ी के पृष्ठ कितनी ही सावधानी से क्यों न बनाये जायें विद्यार्थियों को वास्तविक सांख्यिक परिमाणों के प्राप्त करने में बहुत कुछ अशुद्धियों की आशा रखनी चाहिये। घिरनी के घुमाने के दिये आवश्यक बल के लगाने भी में बहुत कुछ संशोधन की आवश्यकता है। घिरनी कितनी ही हल्की और अच्छी क्यों न बनी हो, उसकी धुरी पर कुछ न कुछ घर्षण अवश्य रहता है, इसलिये उसके दोनों ओर डोरी के तनाव, जैसा कि हमने अनुमान कर लिया है, बिल्कुल बराबर नहीं होंगे, अर्थात्  $F$  का कुछ भाग घिरनी के घुमाने में भी लग जायगा।

यह वह रीति है जिसका मोरिन ने सन् १८३३ ई० में प्रयोग किया था।

**१८९—घर्षण-कोण।** यदि संस्थिति सीमा पर हो, और घर्षण और अभिलम्ब प्रतिबल को एक मात्र बल में समोजित कर लिया जाय, तो उन कोण को जो यह बल अभिलम्ब से बनाता है, घर्षण-कोण कहते हैं, और एक मात्र बल को परिणामी प्रतिबल कहते हैं।

मान लो  $A$  दो पिंडों का स्पर्श-बिन्दु है, और मान लो अभिलम्ब बल  $R$  और घर्षण  $\mu R$  की दिशाएँ  $AB$  और  $AC$  हैं।

मान लो परिणामी प्रतिबल  $S$  की दिशा  $AD$  है, इसलिये घर्षण-कोण  $\angle BAD$  होगा। मान लो यह कोण  $\lambda$  है।

चूँकि  $R$  और  $\mu R$ ,  $S$  के अवयव बल हैं, इसलिये

$$S \cos \lambda = R, \text{ और } S \sin \lambda = \mu R$$

अतः वर्ग करके और जोड़ने पर

$$S = R\sqrt{1 + \mu^2},$$

और भाग देने पर

$$\tan \lambda = \mu.$$



अतः हम देखते हैं कि घर्षण-गुणक घर्षण-कोण की स्पष्टता के बराबर होता है।

१९०—चूँकि घर्षण का महत्तम मान  $\mu R$  है, इसलिये परिणामी-प्रतिबल को दिशा और अभिलम्ब की दिशा के बीच का बड़े से बड़ा कोण  $\lambda$  अर्थात् स्पष्टता  $^{-1}\mu$  होगा।

अतः यदि दो पिंड एक दूसरे के सम्पर्क में हों और यदि उनके उभय-निष्ठ अभिलम्ब को अक्ष और स्पर्श-बिन्दु को शीर्ष मान कर एक शंकु बनाया जाय जिसका अर्द्धशीर्ष कोण स्पष्टता  $^{-1}\mu$  हो, तो यह तो सम्भव है कि परिणामी-प्रतिबल की कोई भी दिशा इस शंकु के भीतर अथवा इसके ऊपर हो, परन्तु यह सम्भव नहीं है कि उसको कोई दिशा इस शंकु के बाहर हो।

इस शंकु को घर्षण-शंकु कहने हैं।

१९१—निम्नलिखित मारिणी में कुछ पदार्थों के घर्षण-गुणक और घर्षण-कोण प्रोफेसर रेन्कीन की 'मैशीनरी एण्ड बिल्वर्क' नामक पुस्तक से लेकर दिये गये हैं।

पदार्थ	$\mu$	$\lambda$
लकड़ी, लकड़ी के सम्पर्क में—सूखी	·25 से ·5 तक	14° से 26½° तक
" " " " "—माबुन लगी हुई	·04 से ·2 तक	2° से 11½° तक
धातु, धातु " " "—सूखी	·15 से ·2 तक	8½° से 11½° तक
" " " " "—भीगी	3	16½°
चमड़ा " " " "—सूखा	·56	29½°
" " " " "—भीगा	·36	20°
" " " " "—तेल लगा हुआ	·15	8½°

१९२—यदि एक पिंड एक रुद्ध आन्त घरातल पर रखा हो, और केवल अपने भार और घरातल के प्रतिबल के कारण घरातल से नीचे फिसलने की ठीक सीमा पर हो, तो क्षैतिज से घरातल का झुकाव घर्षण-कोण के बराबर होगा।



मान लें क्षैतिज से घ्रातल का झुकाव  $\theta$  डिग्री का भार  $W$  है और  $R$  अभिलम्ब प्रतिबल है।

चूँकि डिग्री घ्रातल से नीचे फिसलने की सीमा पर है अतः घर्षण घ्रातल के ऊपर की ओर कार्य करेगा और  $\mu R$  होगा।

घ्रातल के लम्ब और समानान्तर दिशा में विश्लेषित किया, तो

$$W \cos \theta = R,$$

$$W \sin \theta = \mu R.$$

अतः भाग देकर

$$\tan \theta = \mu = \tan (\text{घर्षण-कोण}),$$

$$\therefore \theta = \text{घर्षण-कोण}.$$

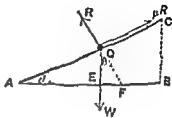
इसे इस प्रकार भी सिद्ध कर सकते हैं :

चूँकि डिग्री अपने भार और परिणामी-प्रतिबल के कारण समतुलित अवस्था में है, इसलिये परिणामी-प्रतिबल ऊर्ध्वाधर होगा। परन्तु, क्योंकि समतुलित अवस्था सीमित है इसलिये परिणामी-प्रतिबल अभिलम्ब से घर्षण-कोण बनायेगा।

अतः परिणामी और ऊर्ध्वाधर के बीच का कोण घर्षण-कोण है, अर्थात् क्षैतिज से घ्रातल का झुकाव घर्षण-कोण के बराबर है।

इस गुण के कारण जो अभी सिद्ध किया गया है घर्षण-कोण को प्रायः अवलम्बित-कोण भी कहते हैं।

विद्यार्थी को मशरूम रखना चाहिये कि जब कोई डिग्री मानत घ्रातल पर किसी बाह्य बल में रूका हुआ रमा हो, तो यह अनुमान नहीं करना चाहिये कि घर्षण-गुणक मदा घ्रातल के क्षैतिज में झुकाव की स्पर्शज्या के बराबर होगा।

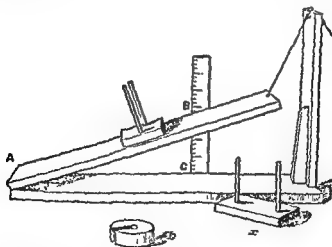


१९३—प्रयोग द्वारा घर्षण-गुणक मालूम करना, और घर्षण के नियमों की जाँच करना। (दूसरी रीति)

पिछली धारा के साध्य से दो पिंडों के बीच का घर्षण-गुणक प्रयोग द्वारा मालूम किया जा सकता है।

मान लो कि आनत तल किमी पदार्थ का बना हुआ है और उसका पृष्ठ यथा-सम्भव चिकना है। उस पर मान लो कि किसी दूसरे पदार्थ की बनी हुई एक पट्टिया रखी हुई है जिसका एक फलक समतल है।

यदि तल के झुकाव के कोण को धीरे धीरे तबतक बढ़ाते जायें जबतक पट्टिया ढीक फिसलने न लगे, तो उस समय झुकाव के कोण की स्पर्शज्या घर्षण-गुणक के बराबर होगी।



इस फल को यथा-सम्भव शुद्ध मालूम करने के लिये प्रयोग उन्ही पदार्थों से बार बार करना चाहिये और फलों का मध्यमान निकाल लेना चाहिये।

जिन यंत्रों का यहाँ चित्र में प्रयोग किया गया है उनमें एक तल्ला तिर्रे पर

कब्जे द्वारा दूसरे तख्ते से लगा हुआ है और दूसरा तख्ता एक मेज से लगा हुआ है। कब्जे द्वारा लगा हुआ तख्ता बेंबी हुई एक डोरी द्वारा ऊँचा और नीचा किया जा सकता है। डोरी का दूसरा सिरा एक नियत आलम्यन के मिरे में जाता है।

कब्जे द्वारा लगे हुये तख्ते पर भिन्न भिन्न आकार और धातु के सरकनेवाले टुकड़े रखे जा सकते हैं जिन पर भिन्न भिन्न भार रखे जा सकते हैं। हर एक सरकनेवाले टुकड़े  $x$  में दो पीतल की छड़ें पेंच द्वारा लगी होती हैं, जिन पर भार इस प्रकार एक के ऊपर एक रखे जा सकते हैं कि प्रयोग में वे फिसल न जायें। नीचे के तख्ते में एक ऊर्ध्वाधर अंशांकित पट्टी लगी होती है जिससे कब्जे द्वारा लगे हुये तख्ते की ऊँचाई  $B$  पर देखी जा सकती है। इस प्रकार  $\frac{BC}{AC}$  का, अर्थात् घात  $1.65$  को स्पष्ट  $\theta$  का मान आसानी से मालूम हो जाता है।

इस यंत्र से घर्षण के नियमों की जाँच की जा सकती है, क्योंकि प्रयोग की सीमाओं के भीतर यह मालूम हो जायगा कि  $\frac{BC}{AC}$  अर्थात्  $\mu$  का मान

(१) हमेशा वही रहेगा जबतक कि सरकनेवाला टुकड़ा  $x$  उनी धातु का बना हो और उसका पृष्ठ उतना ही चिकना रहे,

(२) सरकनेवाले टुकड़े पर लगे हुये भारों अथवा उसके आकार पर निर्भर नहीं रहता है, और

(३) भिन्न भिन्न पदार्थों के लिये भिन्न भिन्न होता है।

यह वही रीति है जिसका प्रयोग कोलाम्ब ने मन् १७८५ ई० में किया था।

१९४—रुद्ध आनत घ्रातल पर समतुलन। एक पिंड, एक रुद्ध घ्रातल पर, जो क्षैतिज से घर्षण-कोण में बड़ा कोण बनाता है, रखा हुआ है, और घ्रातल के समानान्तर महत्तम-ढाल रेखा पर कार्य करने हुये एक बल में रखा हुआ है। बताओ बल किन सीमाओं के भीतर रहेगा।

मान लो घरातल क्षैतिज से कोण  $\alpha$  बनाता है और  $W$  पिंड का भार और  $R$  अभिलम्ब प्रतिबल है। (चित्र १, धारा १५६)

(१) मान लो पिंड घरातल से फिसलने की सीमा पर है, तो घर्पण घरातल पर ऊपर की ओर कार्य करेगा और  $\mu R$  के बराबर होगा। मान लो पिंड को समतुलित रखने के लिये बल  $P$  की आवश्यकता पड़ती है।

घरातल के समानान्तर और लम्ब दिशा में विदिलिष्ट किया, तो

$$P + \mu R = W \text{ ज्या } \alpha \quad (१),$$

$$\text{और} \quad R = W \text{ कोज्या } \alpha \quad \dots \quad (२).$$

$$\therefore P = W (\text{ज्या } \alpha - \mu \text{ कोज्या } \alpha)$$

यदि  $\mu = \text{स्पज्या } \lambda$ , तो

$$\begin{aligned} P &= W [\text{ज्या } \alpha - \text{स्पज्या } \lambda \text{ कोज्या } \alpha] \\ &= W \left[ \frac{\text{ज्या } \alpha \text{ कोज्या } \lambda - \text{ज्या } \lambda \text{ कोज्या } \alpha}{\text{कोज्या } \lambda} \right] \\ &= W \frac{\text{ज्या } (\alpha - \lambda)}{\text{कोज्या } \lambda} \quad (३). \end{aligned}$$

(२) मान लो पिंड घरातल पर ऊपर की ओर फिसलने की सीमा पर है, तो घर्पण घरातल पर नीचे की ओर कार्य करेगा और  $\mu R$  के बराबर होगा। मान लो पिंड को समतुलित रखने के लिये बल  $P_1$  की आवश्यकता पड़ती है। इस स्थिति में

$$\begin{aligned} P_1 - \mu R &= W \text{ ज्या } \alpha, \\ \text{और} \quad R &= W \text{ कोज्या } \alpha. \\ \therefore P_1 &= W (\text{ज्या } \alpha + \mu \text{ कोज्या } \alpha) \\ &= W (\text{ज्या } \alpha + \text{स्पज्या } \lambda \text{ कोज्या } \alpha) \\ &= W \frac{\text{ज्या } (\alpha + \lambda)}{\text{कोज्या } \lambda} \quad \dots \quad (४). \end{aligned}$$

यदि पिंड समतुलित हो तो यह मान  $P$  और  $P_1$  बल के सीमान्त मान होंगे यदि बल  $P$  और  $P_1$  के बीच में हों तो पिंड समतुलित अवस्था में तो रहेगा परन्तु किसी भी दिशा में चलने की सीमा पर नहीं होगा।

अतः समतुलित अवस्था के लिये बल  $W$  ज्या  $(a \pm \lambda)$  कोज्या  $\lambda$  के बीच में रहना चाहिये।

हम देखने हैं कि  $P_1$  का मान  $P$  के मान में  $\mu$  का चिन्ह बदल कर मालूम किया जा सकता है।

१९५—यदि बल  $P$  अज्ञात धरातल से कोण  $\theta$  बनाता हुआ कार्य करे (जैसा कि धारा १५६ की तीसरी स्थिति में है) तो यदि पिंड धरातल से फिसलने की सीमा पर हो तो घर्षण धरातल पर ऊपर की ओर कार्य करेगा अतः समतुलित अवस्था में समीकरण

$$P \text{ कोज्या } \theta + \mu R = W \text{ ज्या } a \quad \dots \dots (1),$$

$$P \text{ ज्या } \theta + R = W \text{ कोज्या } a \quad \dots \dots (2).$$

होंगे।

अतः (२) को  $\mu$  से गुणा करके घटाने पर,

$$P = W \frac{\text{ज्या } a - \mu \text{ कोज्या } a}{\text{कोज्या } \theta - \mu \text{ ज्या } \theta} = W \frac{\text{ज्या } (a - \lambda)}{\text{कोज्या } (\theta + \lambda)}.$$

$P$  के इस मान को (२) में रख कर  $R$  का मान मालूम हो जायगा।

यदि पिंड धरातल पर ऊपर की ओर फिसलने की सीमा पर हो तो  $\mu$  के चिन्ह को बदल कर,

$$P_1 = W \frac{\text{ज्या } (a + \lambda)}{\text{कोज्या } (\theta - \lambda)}.$$

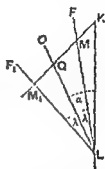
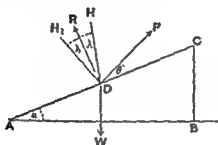
उपस्थाप्य। वह बल जो पिंड को धरातल पर ऊपर की ओर खींचने की सीमा पर है, तब लघुतम होगा जब

$$W \frac{\text{ज्या } (a + \lambda)}{\text{कोज्या } (\theta - \lambda)} \text{ लघुतम हो,}$$

अर्थात्, जब  $\text{कोज्या } (\theta - \lambda) = 1,$   
अर्थात्, जब  $\theta = \lambda.$

अतः पिंड की घ्रातल पर ऊपर की ओर खींचने वाला बल लघुतम होगा जब वह आनत तल में घर्षण-कोण के बराबर कोण बनाता हुआ कार्य करे ।

१९६—पिछली धारा के फल ज्यामितीय रचना द्वारा भी मालूम किये जा सकते हैं ।



एक ऊर्ध्वाधर रेखा  $KL$ , किसी उचित पैमाने (जैसे एक इंच एक पौंड अथवा एक इंच दस पौंड को) पर भार  $W$  को प्रदर्शित करती हुई खींचो ।

रेखा  $LO$  अभिलम्ब प्रतिबल  $R$  की दिशा के समानान्तर खींचो । कोण  $OLF$  और  $OLF_1$  को घर्षण-कोण  $\lambda$  के बराबर, जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है, बनाओ ।

अब जब पिंड घ्रातल पर नीचे अथवा ऊपर की ओर चलने की सीमा पर होता है तो  $LF$  और  $LF_1$ ,  $D$  पर परिणामी प्रतिबल  $DH$  और  $DH_1$  की दिशाओं के समानान्तर रहते हैं ।

$KMM_1$  सम्हालने वाले बल  $P$  के समानान्तर खींचो ताकि वह  $LF$  और  $LF_1$  को  $M$  और  $M_1$  पर फिर मिलें ।

अब स्पष्ट है कि  $KLM$  और  $KLM_1$  क्रमशः समतुल्य की दोनों अन्तिम अवस्थाओं में बल-त्रिभुज होंगे ।

अतः उसी पैमाने पर जिनपर  $KL$ ,  $W$  को प्रदर्शित करता है,  $KM$  और  $KM_1$  पिछली धारा के  $P$  और  $P_1$  को प्रदर्शित करेंगे ।

स्पष्टतः  $OLK = R$  और उर्ध्वाधर के बीच का कोण  $= \alpha$ ,

$$\therefore \angle MLK = \alpha - \lambda \text{ और } \angle M_1LK = \alpha + \lambda.$$

इसी प्रकार  $\angle KQO = R$  और  $P$  की दिशाओं के बीच का कोण  $= 90^\circ - \theta$ ,

$$\therefore \angle KQL = 90^\circ + \theta, \angle KM_1L = 90^\circ + \theta - \lambda$$

और

$$\angle KML = 90^\circ + \theta + \lambda.$$

$$\text{अतः } \frac{P}{W} = \frac{KM}{KL} = \frac{\text{ज्या } KLM}{\text{ज्या } KML} = \frac{\text{ज्या } (\alpha - \lambda)}{\text{ज्या } (90^\circ + \theta + \lambda)} = \frac{\text{ज्या } (\alpha - \lambda)}{\text{कोज्या } (\theta + \lambda)},$$

$$\text{और } \frac{P_1}{W} = \frac{KM_1}{KL} = \frac{\text{ज्या } KLM_1}{\text{ज्या } KM_1L} = \frac{\text{ज्या } (\alpha + \lambda)}{\text{ज्या } (90^\circ + \theta - \lambda)} = \frac{\text{ज्या } (\alpha + \lambda)}{\text{कोज्या } (\theta - \lambda)}.$$

उपसाध्य । यह स्पष्ट है कि  $KM_1$  तब लघुतम होगा जब वह  $LF_1$  पर लम्ब हो, अर्थात् जब  $P_1$  परिणामी प्रतिबल  $DH_1$  की दिशा से समकोण और इसलिये आमत तत् से  $\lambda$  कोण बनावे ।

### उदाहरणमाला ३१

१ । 40 पौ० भार का एक पिंड रूख क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है जिसका घर्षण-गुणक 0.25 है ; वह लघुतम बल मालूम करो जो क्षैतिज दिशा में कार्य करता हुआ पिंड को खींच सके ।

वह लघुतम बल भी मालूम करो, जो क्षैतिज से कोण कोज्या  $= \frac{1}{\sqrt{2}}$  पर कार्य करके पिंड को खींच सकेगा ।

प्रत्येक दशा में धरातल के परिणामी प्रतिबल की दिशा और परिमाण भी मालूम करो ।

✓ २ । एक समतल आधार का भारी कुंदा एक रूख क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है । उस पर एक बल लगाया गया है जो धरातल से  $45^\circ$  का कोण बनाता है और बल धीरे धीरे बढ़ाया जा रहा है यहाँ तक कुंदा ठीक फिसलने की अवस्था में आ जाता है । यदि घर्षण-गुणक 0.5 है, तो बल की कुन्दे के भार से तुलना करो ।

✓३। 30 पौं० का एक भार एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है और 10 पौं० भार के एक बल के क्षैतिज दिशा में लगाने में ठीक चलाया जा सकता है। घर्पण-गुणक और परिणामी प्रतिकूल की दिशा और परिमाण मालूम करो।

✓४। सिद्ध करो कि वह लघुतम बल जो भार  $W$  को एक रूक्ष धरातल पर बसका सकता है  $W \tan \phi$  है, जहाँ  $\phi$  घर्पण-कोण है।

५। एक रूक्ष धरातल का क्षैतिज से झुकाव कोण  $\theta = 15^\circ$  है। सिद्ध करो कि यदि घर्पण-गुणक  $\frac{1}{3}$  है, तो धरातल के समानान्तर कार्य करता हुआ लघुतम बल, जो धरातल पर रखे हुये। हण्डरवेट भार को रोक सकेगा,  $8\frac{1}{3}$  पौं० भार के बराबर होगा। यह भी सिद्ध करो कि वह बल जो पिंड को धरातल के ऊपर खींच सकेगा  $77\frac{1}{3}$  पौं० भार के बराबर होगा।

६। एक आनत धरातल का आधार 4 फुट और ऊँचाई 3 फुट है। यदि 8 पौं० का एक बल धरातल के समानान्तर लगाया जाय तो वह 20 पौं० के भार को फिसलने से ठीक रोक लेता है। घर्पण-गुणक मालूम करो।

✓७। 4 पौं० भार का एक पिंड  $30^\circ$  के ढाल के एक रूक्ष धरातल पर सीमित समतुलित अवस्था में रखा हुआ है। यदि धरातल का ढाल  $60^\circ$  कर दिया जाय तो बताओ पिंड को समझालने के लिये धरातल के समानान्तर कौन सा बल लगाना पड़ेगा।

८। 30 पौं० का एक भार एक रूक्ष आनत धरातल पर सीमित समतुलित अवस्था में रखा हुआ है। धरातल की ऊँचाई लम्बाई की  $\frac{3}{4}$  है। सिद्ध करो कि भार को धरातल पर ऊपर की ओर ठीक खींचने के लिये धरातल के समानान्तर 36 पौं० भार के बल की आवश्यकता होगी।

✓९। 60 पौं० का एक भार एक रूक्ष आनत धरातल पर नीचे की ओर फिसलने की अवस्था में उस समय होता है जब धरातल के समानान्तर उस पर 24 पौं० भार का एक बल कार्य करे। वही भार ऊपर की ओर फिसलने की अवस्था में तब होता है जब धरातल के समानान्तर उस पर 36 पौं० भार का एक बल कार्य करे। घर्पण-गुणक मालूम करो।



१०। दो आनत धरातलों का एक उभयनिष्ठ शीर्ष है, और शीर्ष पर लगी एक चिकनी धिरनी पर जाती हुई एक डोरी दो बराबर भागों से बँधी हुई है। यदि एक धरातल रूक्ष और दूसरा चिकना हो, तो दोनों धरातलों के भुकाव के कोणों के बीच का सम्बन्ध मालूम करो यदि चिकने धरातल पर रखा हुआ भार नीचे फिमलने का अवस्था में हो।

११। एक रूक्ष आनत धरातल पर रखे हुये विभिन्न परिमाण के दो भार एक डोरी से बँधे हुये हैं जो धरातल में नियत एक धिरनी के चारों ओर होकर जाती है। धरातल का महत्तम भुकाव मालूम करो यदि भार सीमित समतुलित अवस्था में हों।

१२। दो बराबर भार एक डोरी के मिरों पर बँधे हुये हैं जो दो समान रूक्ष धरातलों के शिखर पर से जाती है। धरातलों की ऊँचाई बराबर है और वे एक दूसरे से सटे हुये हैं और उनके भुकाव क्षैतिज से क्रम से  $30^\circ$  और  $60^\circ$  हैं। सिद्ध करो कि भार फिमलने वाले होंगे यदि घर्षण-गुणक  $2 - \sqrt{3}$  हों।

१३। एक कण एक रूक्ष गोले के बाहरी पृष्ठ पर रखा हुआ है। गोलेका घर्षण-गुणक  $\mu$  है। सिद्ध करो कि कण फिमलने की अवस्था में होगा यदि उसमें केन्द्र की खींची हुई त्रिज्या ऊर्ध्वाधर में कोण स्वज्या  $-\mu$  बनाती हो।

१४। एक खोखले गोले के भीतर, जिसकी त्रिज्या  $a$  है, कितनी ऊँचाई तक एक कण ठहरा रह सकता है यदि घर्षण-गुणक  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  हो?

१५। किम भुकाव पर बर्फ पर खींचने वाली एक गाड़ी पर जोन लगाये जायें कि यह किमी पहाड़ी के ऊपर कम से कम परिधम में खींचा जा सके?

१६। 5 हण्डरवेट भार के एक घनाकार पत्थर को एक बल  $P$ , जो क्षैतिज में  $40^\circ$  का कोण बनाता है, एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर खींचता

है। यदि घर्पण-कोण  $25^\circ$  हो तो लेखा-चित्रीय रचना द्वारा  $P$  का लघुतम मान मालूम करो।

१७। 1 हण्डरवेट भार का एक पिंड एक घरातल पर जिसका झुकाव क्षैतिज से  $25^\circ$  का है रखा हुआ है। उसे घरातल पर ऊपर की ओर कार्य करता हुआ 15 पौ० भार का एक बल फिसलने से रोकता है। लेखा-चित्रीय रचना द्वारा वह बल मालूम करो जो उसे ऊपर की ओर ठीक खींच सके और घर्पण-गुणक का मान भी मालूम करो।

१९७—एक रुद्ध आनत घरातल पर किसी पिंड के खींचने में किये गये कर्म का परिमाण मालूम करना।

धारा १९४ की दूसरी स्थिति में हम देख आये हैं कि बल  $P_1$  जो पिंड को घरातल पर ठीक ऊपर की ओर खींचेगा  $W$  (ज्या  $\alpha + \mu$  कोज्या  $\alpha$ ) होगा।

अतः  $A$  से  $C$  तक पिंड को खींचने में किया गया कर्म

$$= P_1 \times AC \text{ (चित्र धारा १५६)}$$

$$= W (\text{ज्या } \alpha + \mu \text{ कोज्या } \alpha) \cdot AC$$

$$= W \cdot AC \text{ ज्या } \alpha + \mu \cdot W \cdot AC \text{ कोज्या } \alpha$$

$$= W \cdot BC + \mu W \cdot AB$$

= घरातल के न होने पर पिंड को उसी ऊर्ध्वाधर ऊँचाई तक खींचने में किया गया कर्म + पिंड को आनत घरातल के आधार के बराबर क्षैतिज दूरी तक जो उतनी ही दूरी है जितना कि घरातल, खींचने में किया गया कर्म।

१९८—पिछली धारा में हम देखते हैं कि यदि हमारा आनत घरातल रुद्ध हो, तो साक्षर्य्य द्वारा किया गया कर्म भार के विपरीत किये गये कर्म से अधिक होता है। यह बात किमी मनीन के लिये मत्व है। इस सिद्धान्त को इस प्रकार लिख सकते हैं :

किसी मशीन में सामर्थ्य द्वारा किया गया कर्म भार, मशीन के घर्षणीय प्रतिरोध और मशीन के अवयव भागों के भारों के विपरीत किये गये कर्म के बराबर होता है।

किसी मशीन में भार पर किये गये कर्म और सामर्थ्य द्वारा किये गये कर्म की निष्पत्ति को मशीन की दक्षता कहते हैं, अतः

$$\text{दक्षता} = \frac{\text{मशीन से किया गया उपयोगी कर्म}}{\text{मशीन को प्रदान किया गया कर्म}}$$

मान लो यदि घर्षण न हो तो  $P_0$  आवश्यक सामर्थ्य होती है और  $P$  वास्तविक सामर्थ्य है, तो घाग १३८ से,

भार के विपरीत किया गया कर्म

$$= P_0 \times \text{वह दूरी जो इसका प्रयोग-बिन्दु तिसकता है,}$$

और मशीन को प्रदान किया गया कर्म

$$= P \times \text{वह दूरी जो इसका प्रयोग-बिन्दु तिसकता है।}$$

अतः भाग देने से,

$$\text{दक्षता} = \frac{P_0}{P} = \frac{\text{सामर्थ्य जब घर्षण न हो}}{\text{वास्तविक सामर्थ्य}}$$

हम घर्षणीय प्रतिरोध को कभी भी बिल्कुल दूर नहीं कर सकते हैं और न मशीन को बिना भार का ही बना सकते हैं, इसलिये कुछ न कुछ कर्म इन दो कारणों से अवश्य ही नष्ट हो जायगा। अतः मशीन की दक्षता कभी भी इकाई के बराबर बड़ी नहीं हो सकती। दक्षता इकाई के जितनी नाट होती है मशीन उतनी ही जच्छी होती है।

कोई भी मशीन ऐसी नहीं होती है जिसके प्रयोग में हम कर्म की उत्पत्ति कर सकें, और व्यवहार में मशीन के प्रयोग में चाहें वह कितनी ही चिकनी और निर्दोष क्यों न हो कुछ न कुछ कर्म हमेशा नष्ट हो जाता है। किसी भी मशीन का केवल एवमात्र लाभ यह होता है कि जिस बल को हम प्रयोग करें वह बहुगुणित हो जाय और माघ ही माघ, बल के द्वारा कार्य की हुई दूरी भी बहुत कम हो ।

१९९—इस पेंच का समतुलन। रुद्ध पेंच में सामर्थ्य और प्रतिरोध का सम्बन्ध मालूम करना।

धारा १७८ के ही संकेतों को कार्य में लाते हुये मान लो कि पेंच नीचे खिसकने की सीमा पर है अतः घर्पण चूड़ियों पर ऊपर की ओर कार्य करेगा। [धारा १७६ की ही भाँति उसका परिच्छेद आयताकार होगा।]



इस स्थिति में गुटके के ऊर्ध्वाधर दबाव

$$R (\text{कोज्या } \alpha + \mu \text{ ज्य } \alpha), S (\text{कोज्या } \alpha + \mu \text{ ज्य } \alpha), \dots$$

है, और इन दबावों के क्षैतिज अवयव

$$R (\text{ज्य } \alpha - \mu \text{ कोज्या } \alpha), S (\text{ज्य } \alpha - \mu \text{ कोज्या } \alpha), \dots \text{ हैं।}$$

अतः धारा १७८ के समीकरण (१) और (२)

$$W = (R + S + T + \dots) (\text{कोज्या } \alpha + \mu \text{ ज्य } \alpha) \quad \dots \quad (१),$$

$$\text{और } P \cdot b = a (R + S + T + \dots) (\text{ज्य } \alpha - \mu \text{ कोज्या } \alpha) \quad \dots \quad (२)$$

हो जाते हैं।

अतः भाग देने से

$$\frac{P \cdot b}{W} = a \frac{\text{ज्य } \alpha - \mu \text{ कोज्या } \alpha}{\text{कोज्या } \alpha + \mu \text{ ज्य } \alpha} = a \frac{\text{ज्य } \alpha \text{ कोज्या } \lambda - \text{कोज्या } \alpha \text{ ज्य } \lambda}{\text{कोज्या } \alpha \text{ कोज्या } \lambda + \text{ज्य } \alpha \text{ ज्य } \lambda}$$

$$= a \frac{\text{ज्य } (\alpha - \lambda)}{\text{कोज्या } (\alpha - \lambda)}.$$

$$\therefore \frac{P}{W} = \frac{a}{b} \text{ स्पज्या } (\alpha - \lambda).$$

इसी प्रकार यदि पेंच ऊपर की ओर खिसकने की सीमा पर हो, तो  $\mu$  का चिन्ह बदल कर,

$$\frac{P_1}{W} = \frac{a}{b} \frac{\text{ज्य } \alpha + \mu \text{ कोज्या } \alpha}{\text{कोज्या } \alpha - \mu \text{ ज्य } \alpha} = \frac{a}{b} \text{ स्पज्या } (\alpha + \lambda).$$

यदि सामर्थ्य का कोई मान  $P$  और  $P_1$  के बीच में हो, तो पेंच समतुलित अवस्था में होगा परन्तु घर्पण सीमान्त न होगा।

यह ध्यान रहे कि यदि पेंच का कोण  $\alpha$  घर्षण-कोण  $\lambda$  के बराबर हो तो सामर्थ्य  $P$  का मान शून्य होगा। इस स्थिति में पेंच केवल अपनी चूड़ियों के घर्षण से रुका हुआ समतुलित अवस्था में रहेगा। यदि  $\alpha < \lambda$ , तो  $P$  ऋण होगा अर्थात् पेंच नीचे की ओर तब तक नहीं खसकेगा जब तक उस पर दबाव न डाला जाय।

उदाहरण १। यदि किसी पेंच की परिधि २ इंच, उसकी चूड़ियों के बीच की दूरी आधी इंच और घर्षण गुणक  $\frac{1}{6}$  हो, तो बताओ सामर्थ्य किन सीमाओं के बीच पड़ेगी, यदि पेंच एक हन्डरवंट भार के एक पिंड को समतुलित हुये समतुलित अवस्था में हो, और सामर्थ्य-भुजा की लम्बाई १२ इंच हो।

इस प्रश्न में  $2\pi a = 2$ , और  $2\pi a$  स्पज्या  $\alpha = \frac{1}{2}$ ।

$$\therefore a = \frac{1}{\pi}, \text{ और स्पज्या } \alpha = \frac{1}{2}.$$

और स्पज्या  $\lambda = \frac{1}{6}$ , और  $b = 12$ ।

अतः वह बल जो पेंच को ठीक समतुलित करेगा

$$\begin{aligned} &= 112 \times \frac{a}{b} \text{ स्पज्या } (\alpha - \lambda) = 112 \times \frac{1}{12\pi} \times \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{112}{12\pi} \times \frac{1}{21} \\ &= \frac{14}{99} \text{ पी० भार} = 0.14 \text{ पी० भार।} \end{aligned}$$

वह बल जो पेंच को ठीक ऊपर की ओर खसका सकेगा

$$\begin{aligned} &= 112 \times \frac{a}{b} \text{ स्पज्या } (\alpha + \lambda) = \frac{112}{12\pi} \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{112}{12\pi} \times \frac{9}{19} \\ &= 1 \frac{85}{209} \text{ पी० भार} = 1.4067 \text{ पी० भार।} \end{aligned}$$

अतः पेंच समतुलित अवस्था में रहेगा यदि सामर्थ्य 0.14 और 1.4067 पी० भारों के बीच में हो।

यदि पेंच चिकना हो तो इष्ट बल

$$= 112 \frac{a}{b} \text{ स्पज्या } \alpha = \frac{112}{12\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{66} = 0.742 \text{ पी० भार।}$$

$$\text{इसलिये, धारा १९८ से, दक्षता} = \frac{.742}{1.4067} = 527$$

उदाहरण २। पीटे हुये लोहे का लकड़ी पर घर्पण-गुणक  $\cdot 15$  है। सिद्ध करो कि पेंच की चूड़ी के भुकाव का लघुतम कोण स्पष्ट्या  $2\frac{3}{8}^{\circ}$  होगा यदि वह लकड़ी के एक मुराख में केवल अपने भार ही के कारण सरक जाता है।

उदाहरण ३। यदि एक पेंच की परिधि ३ इंच, घर्पण-गुणक  $\cdot 15$  और शक्ति-भुजा की लम्बाई 12 इंच हो, और यदि एक इंच में तीन चूड़ियाँ हों, तो वे बल मालूम करो जो क्रमशः पेंच को जब वह एक भार  $W$  सम्हाले हुये है, ठीक सम्हाल सके और ठीक चला सके। सामर्थ्य का मान भी मालूम करो जब पेंच चिकना है और उसकी दक्षता भी निकालो।

$$\text{उत्तर: } \frac{W}{16\pi} (.07), \frac{W}{16\pi} (.385), \frac{W}{16\pi} (.2), 577$$

उदाहरण ४। सिद्ध करो कि एक पेंच की दक्षता महत्तम होगी यदि उसका कोण  $45^{\circ} - \frac{\lambda}{2}$  हो।

यदि घर्पण है, तो भार  $W$  उठाने के लिये आवश्यक बल  $= W' \cdot \frac{a}{b}$  स्पष्ट्या  $(a + \lambda)$ , और जब घर्पण नहीं है, तो बल  $= W' \cdot \frac{a}{b}$  स्पष्ट्या  $a$ .

धारा १९८ की ही भाँति दक्षता  $E =$  इनकी निष्पत्ति

$$= \frac{\text{स्पष्ट्या } a}{\text{स्पष्ट्या } (a + \lambda)} = \frac{\text{ज्या } a \text{ कोज्या } (a + \lambda)}{\text{कोज्या } a \text{ ज्या } (a + \lambda)}$$

$$\therefore 1 - E = 1 - \frac{\text{ज्या } a \text{ कोज्या } (a + \lambda)}{\text{कोज्या } a \text{ ज्या } (a + \lambda)} = \frac{\text{ज्या } \lambda}{\text{कोज्या } a \text{ ज्या } (a + \lambda)}$$

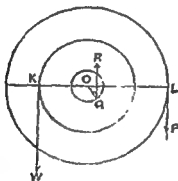
$$= \frac{2 \text{ ज्या } \lambda}{\text{ज्या } (2a + \lambda) + \text{ज्या } \lambda}$$

$\therefore E$  तब महत्तम होगी जब  $1 - E$  लघुतम होगी,

अर्थात् जब, ज्या  $(2\alpha + \lambda)$  महत्तम होगी,

अर्थात्, जब  $2\alpha + \lambda = 90^\circ$ , अर्थात्  $\alpha = 45^\circ - \frac{\lambda}{2}$ .

२००—चक्र और घुरी जिसकी चूल् रुद्ध घुरी पर रखी है।



मान लो बीच का वृत्त धारा १५९ के चित्र (जो बहुत बड़ा कर दिसलाया गया है) के चूल A और B को प्रदर्शित करता है जब उसे सिरे में देखते हैं।

इन चूलों और घुरी, जिन पर वे रखे हुये हैं, के बीच को परिणामी त्रिपा ऊर्ध्वापर होंगी क्योंकि वह P और W से समतुल्य है।

यदि हम यह भी मान लें कि P, W को ठीक परावृत्त करने की सीमा पर हैं तो यह स्पर्श-बिन्दु Q पर मीचे गये अभिलम्ब से कोण  $\lambda$ , घर्षण-कोण, बनायेगी।

अतः Q चूल के सबसे नीचे के बिन्दु पर नहीं हो सकता है परन्तु यह वहाँ होगा जहाँ चित्र में दिसलाया गया है जहाँ OQ ऊर्ध्वापर से कोण  $\lambda$  बनाती है। इसलिये Q पर परिणामी प्रतिबल ऊर्ध्वापर होगा।

$\therefore R, P$  और W से समतुल्य है,

$$\therefore R = P + W \quad \dots \quad (1).$$

$O$  पर पूर्ण लेने पर

$$P.b - R.c \text{ ज्या } \lambda = W.a \quad (२),$$

जहाँ  $c$  चूल् तथा  $b$  और  $a$  चक्र और धुरी की त्रिज्यायें हैं (धारा १५९ की भाँति)।

(१) और (२) को हल करके,

$$P = W \frac{a+c \text{ ज्या } \lambda}{b-c \text{ ज्या } \lambda}.$$

यदि  $P$  केवल इतना है कि वह  $W$  को ठीक सम्हाल सके अर्थात् यदि मशीन  $\frac{1}{2}$  दिशा में चलने की सीमा पर हो, तो  $\lambda$  के चिन्ह को बदल कर,

$$P_1 = W \frac{a-c \text{ ज्या } \lambda}{b+c \text{ ज्या } \lambda}.$$

इस स्थिति में स्पर्श-बिन्दु  $Q$ ,  $O$  में नीचे गये ऊर्ध्वाधर के बाईं ओर होगा।

२०१—टंक लोहे अथवा धातु का एक टुकड़ा होना है जिसमें दो समतल फलक होते हैं जो एक तीक्ष्ण धार पर मिलते हैं।

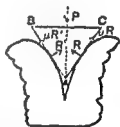
इसे लकड़ी अथवा और सख्त चीजों के चीरने के काम में लाते हैं। ऊपर के फलक पर हथौड़े से बराबर चोटें मार कर इसकी धार को भीतर की ओर घुसाते हैं।

टंक की क्रिया का प्रश्न वास्तव में गत्यात्मक प्रश्न है।

हम केवल स्थिति सम्बन्धी प्रश्न पर विचार करेंगे जब टंक के ऊपरी फलक पर बल लगा कर उसे ठीक समतुलित अवस्था में रखा जाता है।

मान लो  $ABC$  टंक का परिच्छेद है और मान लो इसके फलक आपात  $BC$  से बराबर कोण बनाने हैं। मान लो कोण  $CAB = a$ .

मान लो ऊपर के फलक पर  $P$  बल लगाया गया है, और  $R$  और  $R$  लकड़ी के उन बिन्दुओं पर अभिलम्ब प्रतिबल हैं जहाँ टंक लकड़ी का स्पर्श





करता है, और  $\mu R$  और  $\mu R'$  घर्षण हैं, यदि यह मान लिया गया है कि टंक भीतर घुमने की सीमा पर है ।

हम यह मान लेंगे कि बल  $P$ ,  $BC$  के मध्य-बिन्दु पर लगाया गया है और उसकी दिशा  $BC$  पर लम्ब है और इसलिये कोण  $BAC$  को समविभाजित करती है ।

$BC$  और उसकी लम्ब दिशा विद्विष्ट किया, तो

$$\mu R \text{ ज्या } \frac{\alpha}{2} - R \text{ कोज्या } \frac{\alpha}{2} = \mu R' \text{ ज्या } \frac{\alpha}{2} - R' \text{ कोज्या } \frac{\alpha}{2} \dots (1),$$

$$\text{और } P = \mu (R + R') \text{ कोज्या } \frac{\alpha}{2} + (R + R') \text{ ज्या } \frac{\alpha}{2} \dots (2).$$

समीकरण (1) में  $R = R'$ , और इस लिये (2) में

$$P = 2R \left( \mu \text{ कोज्या } \frac{\alpha}{2} + \text{ज्या } \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } \frac{2R}{P} &= \frac{1}{\mu \text{ कोज्या } \frac{\alpha}{2} + \text{ज्या } \frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{कोज्या } \lambda}{\text{ज्या } \frac{\alpha}{2} \text{ कोज्या } \lambda + \text{कोज्या } \frac{\alpha}{2} \text{ ज्या } \lambda} \\ &= \frac{\text{कोज्या } \lambda}{\text{ज्या } \left( \frac{\alpha}{2} + \lambda \right)}, \end{aligned}$$

जहाँ  $\lambda$  घर्षण-कोण है ।

टंक के घीरने की सामर्थ्य को  $R$  से नापने है । किसी दिये हुये बल  $P$  के लिये यह घीरने की सामर्थ्य तब महत्तम होगी जब  $\alpha$  लघुतम हो ।

सैद्धान्तिक रूप में यह तब सम्भव है जब  $\alpha$  शून्य हो अर्थात् जब टंक अत्यल्पीय शक्ति का हो । व्यवहार में टंक में घीरने की बड़ी में बड़ी शक्ति तब होती है जब मजबूती के विचार में उमका कोण छोटे में छोटा हो ।

२०२—यदि टंक और लकड़ी के बीच में कोई घर्षण न हो (यद्यपि ऐसा अनुमान व्यावहारिक रूप में असम्भव है), तो  $\lambda = 0$ , और इसलिये

$$\frac{2R}{P} = \frac{1}{\text{ज्या } \frac{\alpha}{2}} = \csc \frac{\alpha}{2}.$$

२०३—यदि लकड़ी द्वारा टंक पर प्रयोग किया गया मपीडन बल पर्याप्त मात्रा में हो तो बल  $P$  टंक की नीचे चलाने के लिये काफी न होगा ; अतः इस दशा में टंक बाहर फेंके जाने की सीमा पर होगा ।

यदि ऐसी अवस्था में  $P$  का मान  $P_1$  है, तो इसका मान धारा २०१ में  $\mu$  के चिन्ह को बदल कर निकाला जा सकता है, इसलिये

$$P_1 = 2R \left( \text{ज्या} \frac{a}{2} - \mu \text{ कोज्या} \frac{a}{2} \right) = 2R \frac{\text{ज्या} \left( \frac{a}{2} - \lambda \right)}{\text{कोज्या} \lambda}$$

यदि  $\frac{a}{2} > \lambda$ , तो  $P_1$  का मान धन होगा ।

यदि  $\frac{a}{2} < \lambda$  तो  $P_1$  का मान ऋण होगा और इसलिये टंक बाहर फिसल जाने की सीमा पर होगा यदि उसके ऊपर के फलक पर बिचाव का प्रयोग किया जाय ।

यदि  $\frac{a}{2} = \lambda$ , तो टंक बिना किसी बल के लगाये ठीक चिपट जायगा ।

उदाहरण । सिद्ध करो कि पेंचकश में उत्पादित बल, जिसमें दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी  $c$  है और सामर्थ्य  $2b$  लम्बी छड़ के सिरे पर लगाई जाती है, वही है जो एक पतले द्विममबाहु टंक में उत्पन्न होती है जिसका कोण  $\alpha$  इस प्रकार का है कि

$$\text{ज्या} \frac{\alpha}{2} = c \div 4nb$$

२०४—पर्यण मशीनों की व्यावहारिक क्रियाओं पर इतना प्रभाव डालता है कि मॅकानिक अन्वेषणों में कोई अधिक वास्तविक लाभ नहीं होना और किसी विशेष मशीन के लिये प्रयोग का ही आश्रय लेना पड़ना है । सभी प्रकार की मशीनों के लिये एक ही रीति प्रयुक्त की जाती है ।

वेग-निष्पत्ति प्रयोग द्वारा निकाली जा सकती है ; क्योंकि, सभी मशीनों में यह उम भिन्न के बराबर होती है जिसका अंग वह दूरी है जो

सामर्थ्य नलती है और जिसका हर वह मंगत दूरी है जो भार अथवा प्रतिरोध चलता है। मान लो यह  $n$  है।

मान लो उठाया हुआ भार  $W'$  है, तो भंडान्तिक सामर्थ्य  $P_0 \cdot \frac{W'}{n}$  होगी जहाँ घर्षण नहीं है। प्रयोग द्वारा सामर्थ्य  $P$  का वास्तविक मान मालूम करो जो  $W'$  को ठीक उठा सके। मशीन का वास्तविक यांत्रिक लाभ  $\frac{W'}{P}$  है, और धारा १९८ में इसकी दक्षता  $\frac{P_0}{P}$  है। दक्षता और वेग-निष्पत्ति का गुणनफल  $\approx \frac{P_0}{P} \cdot \frac{W'}{P_0} = \frac{W'}{P} =$  यांत्रिक लाभ।

२०५—उदाहरण के रूप में उस अन्तरीय चक्र और घुरी के माडल को लो जिसपर कुछ प्रयोग किये गये थे और जो अच्छी अवस्था में न था और न प्रयोग से पहले साफ ही किया गया था और न उसकी अथवा उसकी घिरनी की धूल पर तेल ही लगाया गया था।

धारा १६४के संकेत में  $a$ ,  $b$  और  $c$  के मान  $1\frac{1}{2}$ , ३, और ६ इंच निकले थे, इसलिये वेग-निष्पत्ति का मान

$$n = \frac{2b}{c-a} = \frac{2 \times 6\frac{1}{2}}{3-1\frac{1}{2}} = 9.$$

इस मान की जाँच प्रयोग द्वारा भी की गई थी, क्योंकि यह मालूम हुआ था कि जब  $W'$  एक इंच ऊपर बढ़ता था, तो  $P$  भी इंच नीचे उतरता था।

$P$  को पलट्टे में रखे हुये भारों में जिसका भार भी  $P$  में सम्मिलित था नापा गया था, इसी प्रकार  $W'$  भी नापा गया था।

घिरनी का भार भी जिसपर  $W'$  लगा हुआ था  $W'$  के भार में सम्मिलित कर लिया गया था।

$P$  और  $W'$  के ग्रामों में मंगत मान नीचे की सारिणी में दिये गये हैं।  $P$  का मान वह था जो भार  $W'$  को ठीक सम्हालता था। तीसरे स्तम्भ में  $P_0$  के संगत मान अर्थात् वे मान जिनकी आवश्यकता होती यदि घर्षणीय प्रतिरोध न होते, दिये गये हैं।

$W$	$P$	$P_0 = \frac{W}{n}$	$E = \frac{P_0}{P}$	$M = \frac{W}{P}$
50	28	5.55	2	1.79
100	36	11.11	31	2.78
150	45	16.67	37	3.3
250	60	27.74	46	4.17
450	90	50	56	5
650	119	72.22	61	5.46
850	147	94.44	64	5.78
1050	175	116.67	67	6
1250	203	138.88	68	6.16
1450	232	161.11	69.4	6.25

चौथे स्तम्भ में दक्षता  $E$  के मान दिये हुये हैं और अन्तिम स्तम्भ में यांत्रिक लाभ  $M$  के मान दिये गये हैं।

ऊपर के परिमाणों को वर्गीकृत कागज पर अंकित करने पर, जिसे विद्यार्थी स्वयं कर सकता है, यह मालूम होगा कि  $P$  के मानों को प्रदर्शित करने वाले बिन्दु लगभग उस सरल रेखा पर होंगे जो तीसरे और अन्तिम मानों से जाती है। अतः लेखा-चित्र के सिद्धान्त के अनुसार  $P$  और  $W$  का सम्बन्ध  $P = aW + b$  रूप का होगा, जहाँ पर  $a$  और  $b$  स्थिर राशियाँ हैं।

योंकि  $P = 45$  जब  $W = 150$  और  $P = 232$  जब  $W = 1450$ ।

$$\therefore 45 = 150a + b \text{ और } 232 = 1450a + b.$$

हल करके  $a = 0.144$  और  $b = 23.4$  लगभग, अतः  $P = 0.144W + 23.4$ । इसे मशीन का नियम कहते हैं।

$$\text{अब } P_0 = \frac{1}{9}W = 0.111W.$$

$$\text{अतः } E = \frac{P_0}{P} = \frac{0.111W}{0.144W + 23.4}$$

और

$$M = \frac{W'}{P} = \frac{W'}{.144W' + 23.4}$$

इनमें किसी भी भार  $W'$  के लिये  $E$  और  $M$  मालूम हो जाते हैं।

ज्यों ज्यों  $W'$  बढ़ता है  $E$  और  $M$  के मान भी बढ़ते हैं। यदि  $E$  के मान को  $W'$  के सब मानों के लिये सही माने, तो उसका सबसे बड़ा मान तब होगा जब  $W'$  अनन्त बड़ा हो और  $= \frac{.111}{.144} = .77$  लगभग, अर्थात् इस मशीन में कम से कम 23% कर्म नष्ट हो जाता है।

याधिक लाभ का सबसे बड़ा संगत मान  $= \frac{1}{.144} = 7$  लगभग।

यदि प्रयोग से पहले मशीन भली प्रकार साफ़ कर ली जाती और उसमें तेल लगा लिया जाता, तो अधिक सही परिणाम प्राप्त होते।

२०६—जैसा कि पिछली धारा के उदाहरण से स्पष्ट है किसी दूसरी मशीन में भी वास्तविक दक्षता इकाई से कहीं कम होती है।

उन मशीनों से जिनमें कुछ कम दक्षता होती है प्रायः एक व्यावहारिक लाभ होता है।

यह सिद्ध किया जा सकता है कि किसी भी मशीन में जिसमें प्रयुक्त सामर्थ्य का घर्षण पर कोई प्रभाव नहीं होता, यदि दक्षता  $\frac{1}{2}$  से कम हो तो भार जब तक उस पर कोई सामर्थ्य न लगाई जाय, अपने आप नीचे की ओर नहीं उतरता।

ऐसी मशीनों के उदाहरण वे पेंच हैं जिनका पिच छोटा होता है और जिनमें सामर्थ्य, धारा १७८ की भाँति, क्षैतिज दिशा में लगाई जाती है, और वे आमतौर पर धरातल हैं जिनमें सामर्थ्य धारा १९४ की भाँति, धरातल के ऊपर की ओर लगाई जाती है।

उन मशीनों में जिनमें घर्षण प्रयुक्त सामर्थ्य पर निर्भर रहता है कोई ऐसा व्यापक नियम सिद्ध नहीं किया जा सकता, और प्रत्येक अवस्था में पृथक् पृथक् रीति में विचार करना पड़ता है। परन्तु यह एक व्यापक नियम माना जा सकता है कि जहाँ सामर्थ्य का घर्षण पर बहुत कम प्रभाव हो

वहाँ भार स्वयं नीचे नहीं उतरता यदि दक्षता  $\frac{1}{2}$  से कम है। ऐसी मशीन को कहा जाता है कि वे नहीं 'उलटती' हैं।

उदाहरणार्थ, साधारण रूप से धनी अन्तरीय घिरनी में (धारा १६५) दक्षता  $\frac{1}{2}$  से कम होती है। इसलिये जब तक उस पर कोई बल  $P$  न लगाया जाय, अर्थात् यदि मशीन को छोड़ दिया जाय और जंजीर को चलने दिया जाय तो भार  $W$  नीचे नहीं उतरता।

यह न उलटने वाला गुण बहुत अगों तक कम दक्षता की कमी को पूरा कर देता है।

चक्र और धुरी में यांत्रिक लाभ प्रायः अधिक होता है और दक्षता  $\frac{1}{2}$  से कहीं अधिक होती है। परन्तु यह बात कि मशीन उलट जाती है, उसे अन्तरीय घिरनी से अधिक उपयोगी नहीं बना देती।

जो विद्यार्थी मशीनों की व्यावहारिक क्रियाओं का अधिक ज्ञान प्राप्त करना चाहता है वह सर राइट बाल के एक्सपेरिमेंटल मेकेनिक्स अथवा व्यावहारिक यंत्र विज्ञान पर पुस्तकें देखे।

### उदाहरणमाला ३२

१। 6 हण्डरवेट के एक भार को एक रुक्ष आनत धरातल पर खींचने में कितना कर्म व्यय होगा, जब धरातल की ऊँचाई 3 फुट, आधार 20 फुट, और घर्पण-गुणक  $\frac{1}{2}$  है ?

२। 10 टन का एक भार आधे घण्टे में एक आनत धरातल पर जिसका झुकाव  $30^\circ$  का है, 330 फुट ऊपर खींचा गया है। यदि घर्पण-गुणक  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  है तो बताओ कितना कर्म व्यय होगा और उस इंजन की अश्व-सामर्थ्य मालूम करो जो इस कर्म को कर सकेगा।

३। एक तालाब जो 24 फुट लम्बा, 12 फुट चौड़ा, और 16 फुट गहरा है, एक कुएँ के पानी से भरा गया है जिसकी सतह हमेशा तालाब के शिखर से 80 फुट नीची रहती है। बताओ तालाब के भरने में कितना कर्म

किया गया है और उस इंजन की अक्ष-शामर्थ्यं मालूम करो। जिसकी दक्षता 5 है और जो सालाब को 4 घण्टों में भर देता है।

८। एक वाष्प-इंजन के यूताकार पिस्टन (पिचकारी) का व्यास 60 इंच है और वह एक मिनट में 11 चोटें करता है। प्रत्येक चोट की लम्बाई 8 फुट है। पिस्टन के प्रति वर्ग इंच में मध्यमान दबाव 15 पौं० रहता है और इंजन की दक्षता 65 है। यह मान करके कि कुछ भी फर्न नष्ट नहीं होता बताओ इंजन 300 फुट गहरे कुएँ से एक घण्टे में कितने घन फुट पानी उठावेगा।

९। एक इंजन के पिस्टन का व्यास 80 इंच है। वाष्प का मध्यमान दबाव 12 पौं० प्रतिवर्ग इंच है। चोट की लम्बाई 10 फुट और प्रति मिनट द्वाक चोटों की संख्या 11 है। इंजन 500 फीट की गहराई से प्रति मिनट 42½ घनफुट पानी उठा सकता है। सिद्ध करो कि उसकी दक्षता लगभग 6 है।

१०। चक्र और घुरी की त्रिज्याएँ 4 फुट और 6 इंच हैं। यदि 200 पौं० भार के प्रतिरोध को पराजित करने के लिये 56 पौं० भार के बल की आवश्यकता पड़ती है तो मशीन की दक्षता क्या है ?

११। 'ब्लॉक एण्ड टैंकिल' (घिरनियों की दूसरी धेनी) के कुछ प्रयोगों में वेग-विपत्ति 4 थी, उठाये गये भार 10, 80 और 160 पौं० थे, और उनकी संगत सामर्थ्य के मान 23, 58 और 85 पौं० थे। प्रत्येक स्थिति में दक्षता मालूम करो।

१२। किसी मशीन में यह ज्ञात हुआ कि क्रश: 12 और 75 पौं० भार के सामर्थ्य से 700 और 300 पौं० भार के प्रतिरोध पराजित किये जा सकते हैं। यह मान कर कि  $P = a + bW$ ,  $a$  और  $b$  के मान मालूम करो।

१३। एक स्कू-ट्रैक के कुछ प्रयोगों में भार  $W$  के मान 150, 180, 210, 240, और 270 पौं० भार के बराबर हैं और सामर्थ्य  $P$  के संगत मान 20.9, 22.7, 25.75, 28.4, और 31.4 पौं० भार के बराबर हैं। इन फलों को एक वर्गीकृत कामज पर अंकित करो और यह मान कर कि  $P = a + bW$ ,  $a$  और  $b$  के लगभग मान मालूम करो।

१०। 'ब्लॉक एण्ड टेकिल' (घिरनियों की दूसरी श्रेणी) के कुछ प्रयोगों में  $IV'$  (नीचे के गुटके का भार सम्मिलित करके) और  $P$  के ग्राम भारों में निम्नलिखित मान थे -

$IV' = 75, 175, 275, 475, 675, 875, 1075,$

$P = 25, 48, 71, 119, 166, 214, 264$

नीचे के गुटके में पाँच डोरियाँ थीं।  $P$  और  $IV'$  का लगभग सम्बन्ध और दक्षता और यांत्रिक लाभ के सगत मान मालूम करो।

$P, P_0, E$ , और  $M$  के रेखा-चित्र भी सींचो।

११। निम्नलिखित सारिणी में एक क्रेन पर रखा हुआ भार टनों में और संगत सामर्थ्य पौंड भार में दी गई है।

भार 1, 3, 5, 7, 8, 10, 11

सामर्थ्य 9, 20, 28, 37, 42, 51, 56.

मशीन का नियम मालूम करो, और 5 और 10 टन भारों के लिये दक्षता मालूम करो यदि वेग-निष्पत्ति 500 है।

१२। एक स्क्रू-जैक से, जिसका पिच  $\frac{1}{2}$  इंच है, कोई भार उठाया जाता है। बल 15 इंच लम्बे एक लीवर के सिरे पर सम्य दिशा में लगाया जाता है। भारों के मान टनों में और सगत बलों के मान पौंडों में निम्नलिखित सारिणी में दिये गये हैं।

भार 1, 2.5, 5, 7, 8, 10

बल 24, 32, 46, 57, 63, 73.

मशीन का नियम मालूम करो और 4 और 9 टन भारों के लिये उसकी दक्षता निकालो।



## अध्याय १४

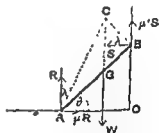
### घर्षण (क्रमशः)

#### (Friction—Continued)

२०७—इन अध्याय में हम घर्षण सम्बन्धी प्रश्नों के हल किये हुये कुछ और उदाहरण देंगे।

**उदाहरण १।** एक सम सीढ़ी, जिसका एक सिरा भूमि पर और दूसरा सिरा एक ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है, समतुलित अवस्था में है। भूमि और दीवार दोनों रूत हैं और उनके घर्षण-गुणक क्रम से  $\mu$  और  $\mu'$  हैं। यदि सीढ़ी दोनों पिंडों पर फिसलने का सीमा पर है, तो सीढ़ी का क्षैतिज से झुकाव मालूम करो।

मान लो  $AB$  सीढ़ी है और  $G$  उसका गुरुत्व-केन्द्र है, तथा  $R$  और  $S$  क्रम से  $A$  और  $B$  पर अभिलम्ब प्रतिबल हैं। क्योंकि सीढ़ी का सिरा  $A$  दीवार से दूर फिसलने की सीमा पर है इसलिये घर्षण  $\mu R$  दीवार की ओर होगा, और सिरा  $B$  ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर फिसलने की सीमा पर है इसलिये घर्षण  $\mu' S$  ऊपर की ओर कार्य करेगा।



मान लो सीढ़ी का भूमि से झुकाव  $\theta$  है, और उसकी लम्बाई  $2a$  है।

क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं में विश्लिष्ट किया, तो

$$\mu R = S \quad \dots \quad (1),$$

$$\text{और} \quad R + \mu' S = W \quad \dots \quad (2).$$

$A$  पर धूर्ण लिया, तो

$$II'. \quad \text{कोज्या } \theta = \mu' S. 2a \text{ कोज्या } \theta + S. 2a \text{ ज्या } \theta,$$

$$\therefore II' \text{ कोज्या } \theta = 2S(\mu' \text{ कोज्या } \theta + \text{ज्या } \theta) \quad \dots \quad (3).$$

$$(1) \text{ और } (2) \text{ से,} \quad \mu (II' - \mu' S) = S,$$

$$\text{और} \quad \therefore \mu II' = S(1 + \mu\mu') \quad \dots \quad (4).$$

(3) और (4) से, भाग देकर,

$$\frac{\text{कोज्या } \theta}{\mu} = \frac{2(\mu' \text{ कोज्या } \theta + \text{ज्या } \theta)}{1 + \mu\mu'},$$

$$\therefore \text{कोज्या } \theta (1 - \mu\mu') = 2\mu \text{ ज्या } \theta.$$

$$\text{अतः} \quad \text{स्पज्या } \theta = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu}.$$

घंकल्पिक विधि :

मान लो  $A$  और  $B$  पर  $\lambda$  और  $\lambda'$  घर्पण-कोण हें।  $A$  पर खींचे गये अभिलम्ब से  $\lambda$  कोण बनाती हुई  $AC$  रेखा खींचो, और  $B$  पर खींचे गये अभिलम्ब से  $\lambda'$  कोण बनाती हुई  $BC$  रेखा खींचो जैसा चित्र में दिखलाया गया है।

धारा १८९ से,  $AC$  और  $BC$ ,  $A$  और  $B$  पर परिणामी प्रतिबलों की दिशाएँ हें। क्योंकि सीढ़ी इन परिणामी प्रतिबलों और भार से समतुलित अवस्था में रहती है, इसलिये इनकी क्रिया-रेखाएँ एक बिन्दु पर मिलेंगी और इसलिये  $G$  से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा भी  $C$  से जायगी।

अब धारा ७९ के सूत्र (१) से

$$(a+a) \text{ कोस्पज्या } CGB = a \text{ कोस्पज्या } ACG - a \text{ कोस्पज्या } BCG,$$

$$\text{अर्थात्} \quad 2 \text{ स्पज्या } \theta = \text{कोस्पज्या } \lambda - \text{स्पज्या } \lambda' = \frac{1}{\mu} - \mu'.$$

$$\therefore \text{स्पज्या } \theta = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu}.$$

उदाहरण २। एक सीढ़ी दी हुई अवस्था में इस प्रकार रखी हुई है कि उसका एक मिरा भूमि पर और दूसरा एक ऊर्ध्वाधर दीवार पर है। यदि भूमि

और दीवार दोनों ऊर्ध्व हैं, और घर्षण-कोण क्रम से  $\lambda$  और  $\lambda'$  हैं, तो लेखा-चित्रीय रचना द्वारा बताओ कि एक आदमी उसके ऊपर कितना ऊँचा चढ़ सकता है कि मीढ़ी न फिसलने पावे।

मान लो  $AB$  मीढ़ी है (चित्र, उदाहरण १)

$A$  और  $B$  पर क्रमशः भूमि और दीवार पर खींचे गये अभिलम्बों से घर्षण-कोण बनाती हुई  $AC$  और  $BC$  रेखाएँ खींचो।

$CG$  को ऊर्ध्वाधर खींचो जो  $AB$  को  $G$  पर मिले। यदि आदमी और मीढ़ी का गुरुत्व-केन्द्र  $A$  और  $G$  के बीच में हो तो सीढ़ी समतुलित अवस्था में रहेगी, अन्यथा वह फिसल जायगी।

क्योंकि यदि गुरुत्व-केन्द्र  $G$  और  $B$  के बीच में हो तो उस से सीढ़ी गई ऊर्ध्वाधर रेखा  $BC$  को, जो  $B$  पर घर्षण की सीमान्त दिशा है,  $P$  बिन्दु पर इस प्रकार मिलेगी कि  $\angle PAR$ ,  $A$  पर घर्षण-कोण से बड़ा होगा, और इसलिये समतुलित अवस्था असम्भव होगी।

यदि यह गुरुत्व-केन्द्र  $G$  और  $A$  के बीच में हो तो समतुलित अवस्था सम्भव है, क्योंकि, यद्यपि  $A$  पर सीमान्त घर्षण है तथापि इस गुरुत्व-केन्द्र से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा  $AC$  को बिन्दु  $P$  पर इस प्रकार मिलेगी कि कोण  $PBS < \lambda'$ , अतः समतुलित अवस्था सम्भव है। इसी प्रकार हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि यदि  $B$  पर सीमान्त घर्षण है तो भी समतुलित अवस्था सम्भव है।

यदि सीढ़ी का गुरुत्व-केन्द्र  $G_1$  है और  $G_2$  आदमी के चढ़ने का सबसे ऊँचा स्थान हों, और  $H'_1$  और  $H'_2$  क्रमशः उनके भार हों, तो  $G_2$  सम्बन्ध  $H'_1 \cdot GG_1 = H'_2 \cdot GG_2$  से निकल आवेगा।

### उदाहरणमाला ३३

१। 13 फुट लम्बी एक मम मीढ़ी का एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा दीवार से 5 फुट

दूर रुख क्षैतिज धरातल के एक बिन्दु पर रखा हुआ है। यदि सीढ़ी का भार 56 पौ० है तो सीढ़ी और दीवार के बीच का घर्पण मालूम करो।

२। एक सम सीढ़ी का एक सिरा क्षैतिज फर्श पर और दूसरा ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है। इनके घर्पण-गुणक क्रमसे  $\frac{2}{3}$  और  $\frac{1}{3}$  हैं। सीढ़ी का झुकाव उस अवस्था में मालूम करो जब वह फिसलने को हो।

३। यदि पिछले प्रश्न में घर्पण-गुणक दोनों दशा में  $\frac{1}{3}$  हो, तो सिद्ध करो की सीढ़ी फिसल जायगी यदि ऊर्ध्वाधर से उसका झुकाव स्पष्ट्या  $90^\circ$  है।

४। एक सम सीढ़ी समतुलित अवस्था में रखी है। उसका एक सिरा रुख फर्श पर रखा हुआ है, जिसका घर्पण-गुणक  $\mu$  है और सीढ़ी का दूसरा सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि ऊर्ध्वाधर से उसका झुकाव स्पष्ट्या  $90^\circ(2\mu)$  है।

५। एक सम सीढ़ी का एक सिरा दीवार पर रखा हुआ है। यदि भूमि और दीवार दोनों बराबर रुख हैं, और उनका घर्पण-गुणक स्पष्ट्या  $\theta$  है, तो सिद्ध करो कि सीढ़ी का ऊर्ध्वाधर से सीमान्त झुकाव  $2\theta$  है।

जब सीढ़ी इस अवस्था में है तो क्या बिना उसके फिसले हुये उसपर चढ़ा जा सकता है ?

६। एक सम सीढ़ी समतुलित अवस्था में है। उसका एक सिरा एक रुख क्षैतिज धरातल पर और दूसरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर है। एक आदमी उस पर चढ़ता है। सिद्ध करो कि वह आधी दूर से अधिक नहीं जा सकता।

७। एक सम सीढ़ी का एक सिरा एक चिकनी दीवार पर और दूसरा भूमि पर जिसका घर्पण-गुणक  $\frac{2}{3}$  है रखा हुआ है। यदि सीढ़ी का भूमि से झुकाव  $45^\circ$  हो, तो सिद्ध करो कि एक आदमी जिसका भार सीढ़ी के भार के बराबर है, ठीक सीढ़ी के शिखर तक बिना सीढ़ी के फिसले चढ़ सकता है।

८। 70 फुट लम्बी एक सम सीढ़ी ऊर्ध्वाधर दीवार से  $45^\circ$  का कोण बनाती है। सीढ़ी, दीवार और भूमि के बीच के घर्पण-गुणक क्रम से  $\frac{1}{3}$

और  $\frac{1}{2}$  है। यदि एक आदमी, जिसका भार मीढ़ी के भार का आधा है, सीढ़ी पर चढ़े तो बताओ वह कहीं पर होगा जब मीढ़ी फिसलने की अवस्था में आ जायगी ?

यदि अब एक लड़का सीढ़ी के सबसे नीचे डंडे पर खड़ा हो जाय तो बताओ उसका लघुतम भार क्या होना चाहिये कि आदमी मीढ़ी के शिखर तक पहुँच सके ?

९। दो बराबर मीढ़ियाँ, जिनके भार  $w$  हैं, एक दूसरे पर झुकी हुई खड़ी हैं और उनके सिरे एक रूक्ष क्षैतिज पट्टे पर रखे हैं। यदि घर्षण-गुणक  $\mu$  और दोनों मीढ़ियों के बीच का कोण  $2\alpha$  हो, तो बताओ सीढ़ियों के शिखर पर कौनसा भार रखा जाय कि वे फिसल जायें।

अबने उत्तर के अर्थ की व्याख्या करो जब स्पष्टता  $\alpha > 2\mu$  अथवा  $< \mu$ .

१०। एक मम मीढ़ी क्षैतिज से  $45^\circ$  का कोण बनाती है, और उसका ऊपर का सिरा एक रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार पर और नीचे का सिरा भूमि पर रखा हुआ है। यदि मीढ़ी, भूमि और दीवार के बीच में त्रिसम सीमान्त घर्षण-गुणक  $\mu$  और  $\mu'$  हों, तो सिद्ध करो कि वह लघुतम क्षैतिज बल जो नीचे के सिरे को दीवार की ओर खींचेगा

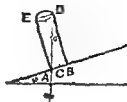
$$\frac{1}{2} W' - \frac{1+2\mu-\mu\mu'}{1-\mu'} \text{ होगा।}$$

११। प्रश्न ९ में यदि भार एक मीढ़ी के मध्य-बिन्दु पर रखा जाय और वह इतना भारी हो कि मीढ़ी को फिसलना सके, तो सिद्ध करो कि पहले दूसरी मीढ़ी फिसलेगी।

२०८—उदाहरण १। एक सम बेल्न आधार के तल एक रूक्ष आना तल पर रखा हुआ है, और तल का क्षैतिज में मुझव धीरे धीरे बढ़ाया जा रहा है। सिद्ध करो कि बेल्न फिसलने में पहले उल्टे जायगा यदि बेल्न के आधार के स्थान की उसकी ऊँचाई में क्षैतिज घर्षण-गुणक में कम हो।

मान लो घ्रातल का क्षैतिज से झुकाव  $\phi$  है जब बेलन गिरने की सीमा पर है। अतः बेलन के गुरुत्व-केन्द्र  $G$  से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा ठीक आधार के भीतर होकर जायगी।

अतः यदि  $AB$  आधार है, तो रेखा  $GA$  ऊर्ध्वाधर होगी।



मान लो  $C$  आधार का मध्य-बिन्दु  
 " बेलन की त्रिज्या और  $h$  बेलन की ऊँचाई है।

$$\therefore \text{स्पज्या } \phi = \text{कोस्पज्या } GAG = \frac{AC}{CG} = \frac{r}{\frac{1}{2}h} = \frac{2r}{h} \dots \dots (1).$$

घ्रातल का क्षैतिज से झुकाव  $\theta$ , जब बेलन फिसलने की सीमा पर है,

$$\text{स्पज्या } \theta = \mu \dots \dots (2)$$

से दिया जाता है।

अतः बेलन फिसलने से पहले उलट जायगा यदि  $\phi < \theta$ , अर्थात् यदि

$$\frac{2r}{h} < \mu$$

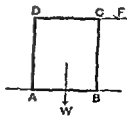
उदाहरण २। एक आयत  $ABCD$ , जिसका आधार  $AB$  एक रूढ़ भूमि पर है, ऊर्ध्वाधर घ्रातल पर रखा हुआ है। एक धीरे धीरे बढ़ता हुआ बल  $DC$  पर कार्य करता है। बताओ यह समतुलन फिसलने में नष्ट होगा अथवा उलटने से।

मान लो  $F$  बल है और  $W$  आयत का भार है।

मान लो  $AB=2a$  और  $BC=h$ .

यदि आयत उलटना है तो स्पष्ट है कि वह  $B$  के बल उलटेंगा और यह तब होगा जब  $F$  और  $W$  के पूर्ण  $B$  पर समतुलित हो,

$$\text{अर्थात् जब } F \cdot h = W \cdot a \dots \dots (1).$$



आयत फिसलेगा जब  $F$  सीमान्त घर्षण के बराबर हो, अर्थात् जब

$$F = \mu W \quad \dots \quad (२).$$

∴ आयत उलटे अथवा फिसलेगा जब (१) से प्राप्त किया गया  $F$  का मान (२) से प्राप्त किये गये  $F$  के मान से कम अथवा अधिक हो, अर्थात् जब

$$\frac{a}{h} < \mu,$$

अर्थात् जब  $\mu > \frac{a}{h}$  आधार और दुगनी ऊँचाई की निष्पत्ति से ।

### उदाहरणमाला ३४

१। एक बेलन अपने वृत्तीय आधार के बल एक रूख आनत धरातल पर रखा हुआ है । घर्षण-गुणक  $\frac{1}{3}$  है । धरातल का झुकाव तथा बेलन की ऊँचाई और आधार के व्यास का सम्बन्ध उस अवस्था में मालूम करो जब बेलन फिसलने और साथ ही गिरने की भी सीमा पर हो ।

२। एक ठोस बेलन रूख क्षैतिज धरातल पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका एक चपटा मिरा धरातल पर है, और उस पर एक क्षैतिज बल उसके ऊपर के सिरे के केन्द्र में होकर लगाया गया है । यदि यह बल बेलन के खसकाने के लिये ठीक पर्याप्त हो, तो सिद्ध करो कि यदि घर्षण-गुणक उस निष्पत्ति से कम हो जो बेलन की त्रिज्या की ऊँचाई के माप है, तो वह फिसलेगा परन्तु उलटेगा नहीं ।

३। एक समन्निवाहु त्रिभुज, जिसका आधार एक रूख क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है, समतुलित अवस्था में है । एक धीरे धीरे बढ़ता हुआ क्षैतिज बल त्रिभुज के धरातल में उसके शीर्ष पर लगाया गया है । सिद्ध करो कि त्रिभुज अपने आधार के सिरे पर लुढ़कने से पहले फिसलेगा यदि घर्षण-गुणक  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$  से कम हो ।

४। एक शंकवाकार शर्करालंड, जिसकी ऊँचाई उसके आधार के व्यास से दुगनी है, एक मेज पर खड़ा है । मेज ठीक इतनी रूख है कि वह फिसलने नहीं पाता । मेज का एक सिरा धीरे धीरे उठाया जाता है यहाँ तक

शर्करा-खंड गिरने की सीमा पर आ जाता है। इस अवस्था में मेज का क्षैतिज में झुकाव मालूम करो।

५। एक शंकु, जिसका शीर्ष-कोण  $2\alpha$  है, एक रुख आनत धरातल पर रखा हुआ है। यदि धरातल का झुकाव बढ़ाया जाय तो सिद्ध करो कि शंकु गिरने से पहले फिसलने लगेगा यदि घर्पण-गुणक  $4 \tan^2 \alpha$  से कम हो।

६। एक सम शंकु एक रुख आनत धरातल पर रखा हुआ है। यदि घर्पण-गुणक  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  हो, तो शंकु का शीर्ष कोण मालूम करो जब वह फिसलने और साथ ही गिरने की सीमा पर भी हो।

७। एक शंकु एक रुख मेज पर रखा हुआ है। शंकु के शीर्ष में बँधी हुई एक डोरी एक निकनी धिरनी पर से जाती हुई एक भार को सन्हाले हुये है। धिरनी की ऊँचाई शंकु के शिखर की ऊँचाई के बराबर है। सिद्ध करो कि यदि भार को धीरे धीरे बढ़ाया जाय तो शंकु गिर जायगा अथवा फिसलेगा जब घर्पण-गुणक  $>$  अथवा  $<$  स्पज्या  $\alpha$  जहाँ पर  $\alpha$  शंकु का अर्द्ध-शीर्ष कोण है।

८। एक घनाकार कुन्दा एक रुख आनत धरातल पर रखा हुआ है जिसके किनारे तल्ले के किनारों के समानान्तर हैं। जब तल्ला धीरे धीरे उड़ाया जाता है तो यदि कुन्दा फिसलने से पहले गिर जाय, तो बताओ घर्पण-गुणक का लघुतम मान क्या होगा ?

९। एक त्रिभुजीय पटल  $ABC$ , जो  $B$  पर समकोण है,  $BC$  के बल एक रुख क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है। यदि धरातल को उसी धरातल में  $BC$  पर लम्ब एक अक्ष के चारों ओर धीरे धीरे इस प्रकार झुकायें कि कोण  $B$ , कोण  $C$  से नीचा हो जाय, तो सिद्ध करो कि पटल फिसलने अथवा गिरने लगेगा जब घर्पण-गुणक स्पज्या  $A$  से कम अथवा अधिक है।

१०।  $ABCD$  एक वर्गाकार सम धातु की प्लेट है जो अपनी भुजा  $BC$  के बल एक विलकुल रुख धरातल पर रखा हुआ है जिसका क्षैतिज में झुकाव  $\alpha$  है। प्लेट के सबसे ऊँचे बिन्दु  $A$  में बँधी हुई एक रस्ती



$AP$ , घरातल के गिलर  $P$  पर लगी एक चिकनी धिरनी पर से जाती हुई एक भार  $w$  को सम्हालती है, और  $AP$  क्षैतिज है। यदि प्लेट का भार  $W'$  है, तो सिद्ध करो कि ज्यों ज्यों  $w$  बढ़ता है तो प्लेट धूमने लगेगी जब

$$w > W' \frac{1 + \text{स्पज्या } a}{2}.$$

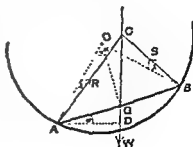
११। आयताकार समानान्तर पट्फलक के रूप का एक टन भार का एक कुन्दा ८ फुट ऊँचा है और उसका आधार ६ फुट भुजा का एक वर्ग है। वह एक रुक्ष भारहीन तलते पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसके आधार की भुजाएँ तलते की लम्बाई और चौड़ाई के समानान्तर हैं, और आधार का केन्द्र तलते के एक सिरे से ६ फुट दूर है। तलता अब इस सिरे पर तब तक उठामा जाता है जब तक कुन्दा बिना फिमले हुये गिर न जाय। बताओ कितना कर्म किया गया।

२०९—उदाहरण। एक सम दंड एक खोखले रुद्ध गोलों के भीतर सीमान्त समतुलित अवस्था में रखा हुआ है। यदि दंड गोलों के केन्द्र पर  $2a$  कोण बनाता हो, और यदि  $\lambda$  घर्षण-कोण हो, तो सिद्ध करो कि क्षैतिज से दंड का झुकाव

$$\text{स्पज्या}^{-1} \left[ \frac{\text{स्पज्या}(a+\lambda) - \text{स्पज्या}(a-\lambda)}{2} \right] \text{ होगा।}$$

मान लो  $AB$  दंड,  $G$  उसका गुरुत्व-केन्द्र और  $O$  गोलों का केन्द्र है। इसलिये  $\angle GOA = \angle GOB = a$ .

$A$  और  $B$  से  $AC$  और  $BC$  रेखाएँ  $A$  और  $B$  का केन्द्र से मिलाने वाली रेखा से  $\lambda$  कोण बनाती हुई खींचो। धारा १८९ से पह क्रमशः  $A$  और  $B$  पर  $R$  और  $S$  परिणामी प्रतिबल्यों की दिशाएँ हैं।



क्योंकि ये प्रतिबल और भार दंड को समतुलित रखते हैं, इसलिये  $G$  से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा  $C$  से जायगी।

मान लो  $A$  से खींची गई क्षैतिज रेखा  $AD$  है जो  $CG$  को  $D$  पर मिलती है इसलिये कोण  $GAD = \theta$ .

$$\angle CAG = \angle OAG - \lambda = 90^\circ - \alpha - \lambda,$$

और  $\angle CBG = \angle OBG + \lambda = 90^\circ - \alpha + \lambda.$

अतः धारा ७९ के साध्य (२) से

$$(a + a) \text{ कोसज्या } CGB = a \text{ कोसज्या } CAB - a \text{ कोसज्या } CBA,$$

अर्थात्  $2 \text{ स्पज्या } \theta = \text{कोसज्या } (90^\circ - \alpha - \lambda) - \text{कोसज्या } (90^\circ - \alpha + \lambda)$   
 $= \text{स्पज्या } (a + \lambda) - \text{स्पज्या } (a - \lambda) \dots \dots (१).$

वैकल्पिक विधि : धारा ८३ के नियमों का प्रयोग करके भी यह फल निकाला जा सकता है।

बलों को दंड पर विस्तारित किया, तो

$$R \text{ कोज्या } (90^\circ - \alpha - \lambda) - S \text{ कोज्या } (90^\circ - \alpha + \lambda) = IV \text{ ज्या } \theta,$$

अर्थात्  $R \text{ ज्या } (a + \lambda) - S \text{ ज्या } (a - \lambda) = IV \text{ ज्या } \theta \dots \dots (२).$

दंड को लम्ब दिशा में विस्तारित किया, तो

$$R \text{ कोज्या } (a + \lambda) + S \text{ कोज्या } (a - \lambda) = IV \text{ कोज्या } \theta \dots \dots (३).$$

$A$  पर घूर्ण लिया, तो

$$S \cdot AB \text{ ज्या } (90^\circ - \alpha + \lambda) = IV \cdot AG \text{ कोज्या } \theta,$$

अर्थात्  $2S \text{ कोज्या } (a - \lambda) = IV \text{ कोज्या } \theta \dots \dots (४).$

समीकरण (३) और (४) से,

$$R \text{ कोज्या } (a + \lambda) = S \text{ कोज्या } (a - \lambda) = \frac{1}{2} IV \text{ कोज्या } \theta.$$

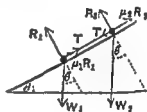
$R$  और  $S$  के इन मानों को (२) में रख दिया, तो

$$\text{स्पज्या } (a + \lambda) - \text{स्पज्या } (a - \lambda) = 2 \text{ स्पज्या } \theta.$$

सांख्यिक उदाहरण। यदि दंड गोले के केन्द्र पर एक समकोण बनाता है, तो सिद्ध करो कि क्षैतिज से उसका झुकाव घर्पण-कोण का दुगुना होगा।

२१० उदाहरण । दो पिंड, जिनके भार  $W_1$  और  $W_2$  हैं, एक आन्त घ्रातल पर रखे हुये हैं । यह एक ढोरी से बंधे हुये हैं जिसकी दिशा घ्रातल की महत्तम ढाल-रेखा पर पड़ती है । यदि पिंडों और घ्रातल के बीच के घर्षण-गुणांक क्रम से  $\mu_1$  और  $\mu_2$  हैं, तो यह मान कर कि अधिक चिढ़ना पिंड दूसरे से नाँचे हैं घ्रातल के क्षैतिज से झुकाव मालूम करो जब दोनों पिंड फिसलने की सीमा पर हों ।

नीचे का पिंड उस अवस्था में फिसलेगा जब उसका झुकाव स्पञ्ज्या  $\mu_1$  है, परन्तु ऊपर का पिंड उस समय तक नहीं फिसलेगा जब तक कि झुकाव स्पञ्ज्या  $\mu_2$  न हो । चूँकि दोनों पिंड एक दूसरे से बंधे हुये हैं, अतः फिसलने के लिये झुकाव इन दोनों मानों के बीच में होगा । मान लो वह मान  $\theta$  है, और मान लो  $R_1$  और  $R_2$  पिंडों के अभिलम्ब प्रतिबल हैं और  $T$  ढोरी का तनाव है ।



दोनों घर्षण  $\mu_1 R_1$  और  $\mu_2 R_2$  घ्रातल पर ऊपर की ओर कार्य करते हैं ।

$W_1$  के समतुलन के लिये

$$W_1 \text{ ज्या } \theta = T + \mu_1 R_1,$$

और  $W_1 \text{ कोज्या } \theta = R_1$ .

$$\therefore T = W_1 (\text{ज्या } \theta - \mu_1 \text{ कोज्या } \theta) \quad \dots \quad (1).$$

$W_2$  के समतुलन के लिये

$$W_2 \text{ ज्या } \theta + T = \mu_2 R_2,$$

और  $W_2 \text{ कोज्या } \theta = R_2$ .

$$\therefore T = \mu_2 R_2 - W_2 \text{ ज्या } \theta = W_2 (\mu_2 \text{ कोज्या } \theta - \text{ज्या } \theta) \quad \dots \quad (2).$$

अतः (१) और (२) से,

$$W_1 (\text{ज्या } \theta - \mu_1 \text{ कोज्या } \theta) = W_2 (\mu_2 \text{ कोज्या } \theta - \text{ज्या } \theta).$$

$\therefore (W_1 + W_2) \text{ ज्या } \theta = (W_1 \mu_1 + W_2 \mu_2) \text{ कोज्या } \theta.$

$$\therefore \text{ स्पज्या } \theta = \frac{W_1 \mu_1 + W_2 \mu_2}{W_1 + W_2}.$$

**उदाहरण १।** दो बराबर पिंड एक रूक्ष आनत धरातल पर एक हल्की डोरी से बंधे हुये रखे हैं। यदि घर्षण-गुणक क्रम से  $\frac{1}{2}$  और  $\frac{1}{3}$  हैं, तो सिद्ध करो कि दोनों फिसलने की अवस्था में तब होंगे जब धरातल का झुकाव स्पज्या  $\frac{1}{2}$  है।

**उदाहरण २।** सिद्ध करो कि वह बड़े से बड़ा कोण जो धरातल क्षैतिज से बन सकता है यदि तीन बराबर पिंड, जिनके घर्षण-गुणक क्रम से  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ , और  $\frac{1}{4}$  हैं और जो एक दूसरे से सम्बद्ध हैं, बिना फिसले समतुलित अवस्था में धरातल पर रखे हों, स्पज्या  $\frac{1}{2}$  होगा।

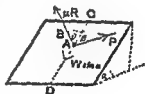
**२११—उदाहरण।** एक कण एक रूक्ष धरातल पर रखा हुआ है जिसका क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है। कण पर एक बल  $P$  लगाया गया है जो धरातल के समानान्तर और महत्तम ढाल की रेखा से  $\beta$  कोण बनाता है। यदि घर्षण-गुणक  $\mu$  है और समतुलन सीमान्त है, तो बताओ कण किस दिशा में फिसलेगा।

मान लो  $W$  कण का भार और  $R$  अभिलम्ब प्रति बल है।

आनत धरातल के लम्ब दिशा में बलों का परिणामी शून्य होना चाहिये।

$$\therefore R = W \text{ कोज्या } \alpha \quad (1).$$

भार का दूसरा अवयव बल  $W \text{ ज्या } \alpha$  है जो महत्तम ढाल-रेखा पर नीचे की ओर कार्य करता है।



मान लो  $\mu R$ , घर्षण  $AB$  दिशा में महत्तम ढाल-रेखा से कोण  $\theta$  बनाता हुआ कार्य करता है, इसलिये कण बढ़ाई हुई  $BA$  की दिशा में फिसलना आरम्भ करेगा।

बयोकि धरातल के पृष्ठ पर कार्य करते हुये बल समतुलित अवस्था में हैं, इसलिये लामी के प्रमेय से,

$$\frac{\mu R}{\text{ज्या } \beta} = \frac{W \text{ ज्या } \alpha}{\text{ज्या } (\theta + \beta)} = \frac{P}{\text{ज्या } \theta} \quad \dots \dots (2).$$

(१) और (२) में से  $R$  और  $W$  का विलोपन करके,

$$\text{कोज्या } \alpha = \frac{R}{W} = \frac{\text{ज्या } \alpha \text{ ज्या } \beta}{\mu \text{ ज्या } (\theta + \beta)}.$$

$$\text{अतः} \quad \text{ज्या } (\theta + \beta) = \frac{\text{स्पज्या } \alpha \text{ ज्या } \beta}{\mu} \quad \dots (3),$$

जिससे  $\theta$  कोण निकल आयेगा ।

सांख्यिक उदाहरण । मान लो घरातल का झुकाव  $30^\circ$ , घर्षण गुणक  $\frac{1}{3}$  है और बल  $P$  और महत्तमढाल-रेखा के बीच का कोण  $30^\circ$  है, तो

$$\text{ज्या } (\theta + 30^\circ) = \frac{\text{स्पज्या } 30^\circ \cdot \text{ज्या } 30^\circ}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{ज्या } 60^\circ, \dots (4).$$

अतः  $\theta = 30^\circ$ , और पिंड घरातल पर महत्तमढाल-रेखा से  $30^\circ$  का कोण बनाता हुआ फिसलना आरम्भ करेगा ।

बल  $P$  का मान आसानी से  $\frac{W}{6}\sqrt{3}$  दिखलाया जा सकता है ।

यदि बल भार को पराजित करने की सीमा पर हो, तो यह आसानी से सिद्ध किया जा सकता है [अथवा (४) से, क्योंकि,  $\theta$  का मान  $90^\circ$  है] कि घर्षण  $\mu R$  क्षैतिज दिशा में कार्य करता है, इसलिये कण क्षैतिज दिशा में फिसलना आरम्भ करेगा और  $P$  का संगत मान  $\frac{W}{3}\sqrt{3}$  होगा ।

### उदाहरणमाला ३५

१ । एक सीढ़ी का एक सिरा  $b$  लम्बाई के दो भागों में विभाजित करता है । एक रूख क्षैतिज फर्श पर और दूसरा एक रूख ऊर्ध्वापर दीवार पर रखा है । सीढ़ी का गुरुत्व केन्द्र उसे  $a$  और यदि फर्श और दीवार

पर घर्षण-गुणक क्रमसे  $\mu$  और  $\mu'$  हैं, तो सिद्ध करो कि सीमान्त समतुलित अवस्था में सीढ़ी का क्षैतिज से झुकाव

$$\text{स्पज्या} = \frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)} \text{ है।}$$

२। एक बिना भार का दंड क्षैतिज अवस्था में दो रुक्ष आनत धरातलों के बीच जो एक दूसरे से समकोण बनाते हैं रखा हुआ है। घर्षण कोण  $\lambda$  प्रत्येक धरातल के झुकाव से कम है। सिद्ध करो कि दंड के उस भाग की लम्बाई, जिस पर एक भार इस प्रकार रखा जा सके कि दंड फिसलने न पाये, दंड की कुल लम्बाई की ज्या  $2a$  ज्या  $2\lambda$  है, जहाँ क्षैतिज से प्रत्येक धरातल का झुकाव  $\alpha$  है।

३। एक भारी समदंड दो क्षैतिज खूंटियों में से एक के ऊपर और दूसरी के नीचे एक ऊर्ध्वाधर धरातल में रखा हुआ है, सिद्ध करो कि उस सबसे छोटे दंड की लम्बाई जो इस अवस्था में रखा जा सकता है,  $a(1 + \text{स्पज्या } \alpha \text{ कोस्पज्या } \lambda)$  होगी, जहाँ खूंटियों के बीच की दूरी  $a$ , उनको मिलाने वाली रेखा का क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  और घर्षण-कोण  $\lambda$  है।

४। एक भारी सम दंड, जिसकी लम्बाई एक फुट है और जिसका एक सिरा रुक्ष और दूसरा चिकना है, एक वृत्ताकार छल्ले के भीतर ऊर्ध्वाधर धरातल में रखा हुआ है। छल्ले की त्रिज्या 10 इंच है। यदि दंड सीमान्त समतुलित अवस्था में है जब उसका रुक्ष सिरा छल्ले के सबसे नीचे बिन्दु पर है, तो सिद्ध करो कि घर्षण-गुणक  $\frac{2}{3}$  है।

५। एक भारी सम दंड अपने सिरों पर ऊर्ध्वाधर धरातल में नियत एक रुक्ष वृत्ताकार छल्ले के भीतर रखा हुआ है। दंड छल्ले के केन्द्र पर  $120^\circ$  का कोण बनाता है, और सीमान्त समतुलित अवस्था में क्षैतिज से कोण  $\theta$  बनाता है। यदि  $\sqrt{3}\mu = \text{स्पज्या } \alpha$ , जहाँ  $\mu$  घर्षण-गुणक है, तो सिद्ध करो कि स्पज्या  $\theta : \text{स्पज्या } 2\alpha :: 2 : \sqrt{3}$ ।

६।  $A$  और  $B$  दो छोटे भारी बराबर छल्ले हैं जो एक रुक्ष क्षैतिज छड़ पर सरकते हैं। घर्षण-गुणक  $3^{-\frac{1}{2}}$  है। एक और भारी छल्ला

$C$ ,  $A$  और  $B$  से बँधी हुई बिना भार की चिकनी डोरी पर सरकता है, तो सिद्ध करो कि सीमान्त समतुलित अवस्था में  $ABC$  एक समत्रिबाहु त्रिभुज होगा।

७। एक भारी सम दंड  $AB$  का एक सिरा एक क्षैतिज दंड  $AC$  पर, जिसमें वह एक छल्ले से लगा हुआ है, सरक सकता है।  $B$  और  $C$  से एक डोरी बँधी हुई है। जब दंड सरकने की सीमा पर है,  $ABC$  एक समकोण है,  $\mu$  घर्षण-गुणक है, और  $AB$  और ऊर्ध्वाधर के बीच का कोण  $\alpha$  है, तो सिद्ध करो कि

$$\mu = \frac{\text{स्पज्या } \alpha}{\text{स्पज्या } \alpha + 2}$$

८। एक सम दंड के सिरे दो नियत बराबर रूझ दंडों पर सरकते हैं, जिनमें एक ऊर्ध्वाधर है और दूसरा क्षैतिज से  $\alpha$  कोण बनाता है। सिद्ध करो कि सरकने वाले दंड का क्षैतिज से झुकाव, जब वह सरकने की सीमा पर हो, समीकरण

$$\text{स्पज्या } \theta = \frac{1 + 2\mu \text{ स्पज्या } \alpha - \mu^2}{2(\text{स्पज्या } \alpha \pm \mu)}$$

से दिया जाता है।

९। एक सम सीढ़ी, जिसकी लम्बाई  $a$  और भार  $W$  है, क्षैतिज से  $\theta$  कोण बनाती है, उसका एक सिरा ऊर्ध्वाधर दीवार पर और दूसरा क्षैतिज फर्श पर रखा हुआ है। दीवार और फर्श दोनों बराबर रूझ हैं, घर्षण-गुणक स्पज्या  $\lambda$  है। सिद्ध करो कि एक आदमी, जिसका भार  $P$  है, सीढ़ी के चोटी के

$$\frac{W \text{ कोस्पज्या } 2\lambda + P \text{ कोस्पज्या } \lambda - (W + P) \text{ स्पज्या } \theta}{2P} a \text{ ज्या } 2\lambda$$

से अधिक निकट नहीं जा सकता।

१०। टेनिस के जाल को सम्हालने वाले डंडे रस्मियों से ऊर्ध्वाधर अवस्था में स्थिर पड़े किये गये हैं, जिनमें में एक एक रस्मी प्रत्येक डंडे में बँधी हुई है और जो डंडों में २ फुट की दूरी पर सूटियों के पारों ओर होकर जानी

है। यदि रस्सी और खूंटियों के बीच में सीमान्त घर्पण-गुणक  $\frac{1}{2}$  है, तो सिद्ध करो कि खूंटियों का ऊर्ध्वावर से भुकाव स्पष्ट्या  $\frac{1}{2}$  से कम नहीं होना चाहिये, जहाँ डंडों की ऊँचाई 4 फुट है।

११। एक आयताकार समानान्तर-पट्फलक के आकार का मजूक जिसका बिना ढकने का भार 200 पौं० है, और जिसकी चौड़ाई पोछे से सामने तक एक फुट है, और ढकने का भार 50 पौं० है, एक विक्रानो दीवार के समानान्तर अपनी पीठ से 6 इंच की दूरी पर खड़ा हुआ है। यदि उसका ढकना खुला हुआ है और दीवार के सहारे रखा हुआ है, तो समतुलित अवस्था में मजूक और भूमि के बीच का लघुतम घर्पण-गुणक मालूम करो।

१२। एक भारी वृत्ताकार मंडल, जिसका धरातल ऊर्ध्वाधर है एक रूक्ष आनत तल पर समतुलित अवस्था में एक डोरी से जो आनत धरातल के समानान्तर है, और जो वृत्त को स्पर्श करती है, रखा हुआ है। सिद्ध करो कि, यदि धरातल का भुकाव  $\frac{1}{2}$  और घर्पण-गुणक  $\frac{1}{2}$  स्पष्ट्या  $\frac{1}{2}$  से कम है तो मंडल धरातल पर किसल जायगा।

१३। एक रूक्ष मेज पर, जिसका घर्पण-गुणक  $\mu$  है, रखा हुआ एक कग एक डोरी से, जिसकी लम्बाई  $a$  है, मेज पर एक नियत बिन्दु  $A$  से बँधा हुआ है। कग से एक दूसरी डोरी बँधी हुई है, जो मेज के विक्राने किनारे पर से जाती हुई एक अन्य स्वतन्त्रतापूर्वक लटके हुये बराबर कण को सम्हालती है। सिद्ध करो कि मेज पर रखा हुआ कण उस वृत्त के किसी बिन्दु  $P$  पर होगा, जिसका केन्द्र  $A$  और त्रिज्या  $a$  है, और जो इस प्रकार का है कि डोरी  $AP$  तनी रहती है और दूसरी डोरी की  $A$  से दूरी  $\mu a$  से अधिक नहीं रहती है।

१४। एक भारी दंड, जिसकी लम्बाई  $2a$  है, एक रूक्ष खूंटो पर रखा हुआ है और उसका एक सिरा एक रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार पर है। यदि दीवार से खूंटो की दूरी  $c$  है और खूंटो और दीवार



दोनों के घर्षण-कोण  $\lambda$  है, तो सिद्ध करो कि जब दंड का दीवार से स्पर्श-बिन्दु खूंटो के ऊपर है यदि दंड और दीवार के बीच का कोण  $\theta$  है, तो दंड नीचे फिसलने को होगा जब

$$\text{ज्या}^3 \theta = \frac{c}{a} \text{कोज्या}^3 \lambda;$$

यदि दंड का दीवार से स्पर्श-बिन्दु खूंटो के नीचे है, तो सिद्ध करो कि दंड नीचे फिसलने को होगा जब

$$\text{ज्या}^3 \theta \text{ज्या}(\theta + 2\lambda) = \frac{c}{a} \text{कोज्या}^3 \lambda,$$

और ऊपर को फिसलने को होगा जब

$$\text{ज्या}^3 \theta \text{ज्या}(\theta - 2\lambda) = \frac{c}{a} \text{कोज्या}^3 \lambda.$$

१५। एक वृत्ताकार मंडल, जिसकी त्रिज्या  $a$  है और भार  $W$  है, एक चिकने गोले के भीतर रखा हुआ है, जिसकी त्रिज्या  $b$  है। एक कण जिसका भार  $w$  है मंडल पर रखा हुआ है। यदि कण और मंडल के बीच का घर्षण-गुणक  $\mu$  है, तो मंडल के केन्द्र से वह बड़ी से बड़ी दूरी मालूम करो जहाँ कण ठहर सकता है

१६। एक चिकना गोला, जिसका भार  $W$  है, एक ऊर्ध्वाधर दीवार और समपार्श्व जिसका एक फलक एक क्षैतिज धरातल पर है, के बीच में रखा हुआ है। यदि क्षैतिज धरातल और समपार्श्व के बीच का घर्षण-गुणक  $\mu$  है, तो सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था को ध्यान में रखते हुये, समपार्श्व का लघुतम भार  $W \left( \frac{\text{स्वज्या } a}{\mu} - 1 \right)$  हो सकता है, जहाँ  $a$  उस फलक का क्षैतिज से झुकाव है जो गोले को स्पर्श करती है।

१७। दो बराबर दंड, जिनकी लम्बाई  $2a$  है, इस प्रकार बंधे हुये हैं कि वे एक वर्ग की दो भुजायें बनाते हैं और उनमें

से एक एक रूख खूँटी पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि दंड के मध्य-बिन्दु से स्पर्श-बिन्दुओं की सीमान्त दूरियाँ  $\frac{a}{2}(1 \pm \mu)$  हैं, जहाँ  $\mu$  घर्षण-गुणक है।

१८।  $AC$  और  $BC$  दो सम दंड  $C$  पर इस प्रकार सम्बद्ध हैं कि वे एक टेढ़ा सम दंड बन जाते हैं जिसके दोनों भाग एक दूसरे पर लम्ब हैं। यह टेढ़ा दंड एक रूख मेज के सिरे पर, जो  $AC$  को उसके मध्य-बिन्दु पर स्पर्श करती है, रखा हुआ है। यदि  $BC$  की लम्बाई  $AC$  से तिगुनी है, तो सिद्ध करो कि  $AC$  के क्षैतिज से झुकाव की स्पर्शज्या  $\frac{1}{3}$  है।

दंड के घर्षण-गुणक का उस दशा में लघुतम मान मालूम करो जब दंड  $A$  बिन्दु मेज के किनारे पर रख कर समतुलित अवस्था में रह सके।

१९। एक भारी रस्सी दो दिये हुये एक ही पदार्थ के बने हुये आनत घरातलों पर उनके उभयनिष्ठ शीर्ष लगी हुई किसी घिरनी पर जाती हुई रखी है। यदि रस्सी फिसलने की सीमा पर है तो सिद्ध करो कि उसके दोनों सिरों को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज से घर्षण-कोण के बराबर कोण बनाती है।

२०। एक रूख आनत घरातल पर ( $\mu = \frac{1}{3}$ ) एक भार  $W$  बल  $\frac{W}{2}$  द्वारा रखा हुआ है जो घरातल के समानान्तर ऊपर की ओर लगाया गया है। उस लघुतम अधिक बल का परिमाण और दिशा मालूम करो जो घरातल पर कार्य करता हुआ भार को फिसलने से रोकता है जब बल  $\frac{W}{2}$  घरातल पर उसकी महत्तम ढाल-रेखा से  $60^\circ$  का कोण बनाता हुआ लगाया जाता है।

२१। एक भार  $W$  एक रूख घरातल पर ( $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ), रखा हुआ है। घरातल का क्षैतिज से झुकाव  $45^\circ$  है। वह घरातल के शिखर पर लगे एक चिकने छल्ले से जाती हुई डोरी से बँधा हुआ है, जिसके दूसरे सिरे पर एक भार  $P$  ऊर्ध्वाधर लटक रहा है। यदि  $W = 3P$ , और  $\theta$  डोरी  $AW$  और घरा-

तल को महत्तमडाल-रेखा के बीच का सबसे बड़ा कोण है, तो सिद्ध करो कि कोज्या  $\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

वह दिशा भी मालूम करो जिसमें  $W$  फिसलना आरम्भ करेगा।

२२। एक भार  $W$  एक रूक्ष आनत धरातल पर रखा हुआ है। धरातल का क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है, और घर्षण-गुणक 2 स्पज्या  $\alpha$  है। सिद्ध करो कि धरातल पर लगा हुआ लघुतम क्षैतिज बल जो पिंड को खिसका सकता है  $\sqrt{3} W$  ज्या  $\alpha$  है, और पिंड महत्तमडाल-रेखा से  $60^\circ$  का कोण बनाता हुआ फिसलना आरम्भ करेगा।

२३। यदि एक हल्के दृढ़ दंड से सम्यद्ध दो बराबर भार, जो बराबर रूक्ष नहीं हैं, एक आनत धरातल पर रखे जायें, जिसका क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  वह कोण है जिसकी स्पर्सज्या घर्षण-गुणकों का गुणोत्तर-मध्यमान है, तो सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में दंड का महत्तमडाल-रेखा से अधिक से अधिक झुकाव

$$\text{कोज्या}^{-1} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\sqrt{2\mu_1\mu_2}} \right)$$

होगा, जहाँ पर  $\mu_1$  और  $\mu_2$  घर्षण-गुणक हैं।

२४। एक भारी कण एक रूक्ष आनत धरातल पर, जिसका क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है, रखा हुआ है। यह एक विना भार की  $AP$  डोरी से धरातल में एक नियत बिन्दु  $A$  से बंधा हुआ है। यदि, जब कण फिसलने की अवस्था में है,  $AB$  महत्तमडाल-रेखा और  $\theta$  कोण  $PAB$  हो, तो सिद्ध करो कि ज्या  $\theta = \mu$  कोस्पज्या  $\alpha$ ।

अपने परिमाण की व्याख्या करो जब  $\mu$  कोस्पज्या  $\alpha$  इकाई से बड़ा हो।

२५। एक अर्द्ध-गोलीय कवच एक रूक्ष धरातल पर रखा हुआ है। धरातल का घर्षण-कोण  $\lambda$  है। सिद्ध करो कि किनारे के समतल आधार का क्षैतिज से झुकाव ज्या<sup>-1</sup>(2ज्या  $\lambda$ ) से अधिक नहीं हो सकता।

२६। एक ठोस समाक्षिक अर्द्धगोला एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर

एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार को स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है। सिद्ध करो कि, यदि घर्पण-गुणक  $\frac{2}{3}$  से अधिक है, तो अर्द्ध-गोला किसी भी अवस्था में समतुलित रह सकता है, और यदि यह गुरुत्वक कम है तो वह लघुतम कोण जो अर्द्ध-गोले का आधार ऊर्ध्वाधर से बनाता है कोज्या  $-\frac{8\mu}{3}$  होगा।

यदि दीवार भी रूढ़ है (घर्पण-गुणक  $\mu'$  हो) तो सिद्ध करो कि यह कोण

$$\text{कोज्या} - \left( \frac{8\mu}{3} \cdot \frac{1+\mu'}{1+\mu\mu'} \right) \text{ है।}$$

२७। एक भारी समांशिक अर्द्ध-गोला एक रूढ़ आनत धरातल पर, उन्नतोदर पृष्ठ धरातल को स्पर्श करता हुआ रखा है। सिद्ध करो कि क्षैतिज से धरातल का महत्तम झुकाव ज्या  $-\frac{2}{3}$  है।

सिद्ध करो कि कोई समांशिक गोला किसी आनत धरातल पर, चाहे वह कितना ही रूढ़ क्यों न हो, समतुलित नहीं रह सकता।

२८। एक अर्द्ध-गोला, जिसका उन्नतोदर पृष्ठ एक रूढ़ आनत धरातल को, जिसका क्षैतिज से झुकाव ज्या  $-\frac{1}{2}$  है, स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है। उसके समतल आधार का ऊर्ध्वाधर से झुकाव मालूम करो।

२९। एक सम अर्द्ध-गोला जिसकी त्रिज्या  $a$  और भार  $W$  है, एक क्षैतिज धरातल पर उन्नतोदर पृष्ठ धरातल को स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है। एक रूढ़ कण, जिसका भार  $W'$  है, उसके समतल पर रखा है। सिद्ध करो कि कण की समतल के केन्द्र से दूरी  $\frac{3W'\mu a}{8W}$  से अधिक नहीं हो सकती, हाँ  $\mu$  घर्पण-गुणक है।

३०। एक गोला, जिसकी त्रिज्या  $a$  है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसके केन्द्र से  $c$  दूर है, सीमान्त समतुलित अवस्था में एक रूढ़ आनत धरातल पर जिसका क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है, रखा हुआ है। सिद्ध करो कि यदि उसे २ कोज्या  $-\left( \frac{\alpha \text{ ज्या } \alpha}{c} \right)$  कोण से घुमाया जाय तो भी वह सीमान्त समतुलित अवस्था में रहेगा।

## अध्याय १५

### विविध

#### (Miscellaneous)

२१२—चिकने कब्जों द्वारा सम्यद्ध पिंड। जब दो पिंड एक दूसरे से कब्जों द्वारा जुड़े होते हैं, तो ऐसा प्रायः होता है कि या तो एक पिंड का गोलाकार सिरा दूसरे पिंड के बनाये हुये गड्ढे में ठीक बैठ जाता है जैसा कि गोल आधार-प्रकोष्ठ (गोल एण्ड साफेट) जोड़ में होता है, अथवा एक गोल पिन अथवा कोई और अटकाने की वस्तु प्रत्येक पिंड के छेदों में होकर डाली जाती है जैसा दरवाजों के कब्जे में होता है।

दोनों स्थितियों में, यदि पिंड चिकने हो, तो प्रत्येक पिंड पर कब्जे की क्रिया केवल एकमात्र बल रहती है। मान लो चित्र दोनों पिंडों को सम्यद्ध करने वाले जोड़ के परिच्छेद को प्रदर्शित करता है। यदि जोड़ चिकना है तो जोड़ के सब बिन्दुओं पर क्रियायें पिन के केन्द्र से जाती हैं और इसलिये उन सब का परिणामीबल  $O$  जाता हुआ एकमात्र बल होता है। एक पिंड पर कब्जे की क्रिया दूसरे पिंड पर कब्जे की क्रिया के बराबर और विपरीत होती है; क्योंकि इन क्रियाओं के बराबर और विपरीत बल पिन को उसका भार उपेक्षणीय होने के कारण समतुलित रखते हैं।



यदि जोड़ चिकना नहीं है, तो स्पर्श-बिन्दु  $A, B, C, D, \dots$  पर घर्षणीय प्रतिरोध भी होंगे जो  $OA, OB, OC, \dots$  के लम्ब कार्य करेंगे। ऐसे जोड़ पर कार्य करते हुये बल प्रायः एकमात्र बल में परिणत नहीं होते परन्तु एक बल और एक बलयुग्म के बराबर होते हैं (धारा ८७)।

चिकने कब्जों में सम्बन्ध रखते हुये प्रश्नों के हल करने में कब्जे पर क्रिया की दिशा और परिमाण दोनों ही प्रायः अज्ञात होते हैं। अतः किसी पिंड पर चिकने कब्जे की क्रिया को दो अज्ञात लम्ब अवयव बलों के बराबर मान लेने से अधिक सुविधा होती है; इस दशा में दूसरे पिंड पर क्रिया इन अवयव बलों के बराबर और विपरीत होती है।

क्योंकि प्रत्येक पिंड पर कार्य करते हुये बल और उसपर जोड़ की क्रियायें समतुलित होती हैं, इसलिये अब धारा ८३ के समतुलन के व्यापक नियमों का प्रयोग किया जा सकता है।

प्रत्येक पिंड पर कार्य करती हुई प्रति-क्रियाओं के अवयव बलों के सम्बन्ध की श्रुतियों को दूर करने के लिये यह उचित है कि, जैसा अगले उदाहरण के दूसरे चित्र में दिखलाया गया है, छड़ों को मिलाने के लिये बढ़ाया न जाय परन्तु उनके बीच में कुछ स्थान छोड़ दिया जाय।

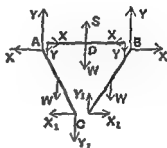
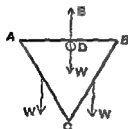
२१३ उदाहरण। तीन बराबर समदंड जिनमें से प्रत्येक का भार  $11'$  है, एक समत्रिबाहु त्रिभुज बनाते हुये चिकने कब्जों द्वारा परस्पर जुड़े हुये हैं। यदि समुदाय एक दंड के मध्य-बिन्दु से सम्हाल लिया जाय, तो सिद्ध करो कि सबसे नीचे के कोण पर क्रिया  $\frac{\sqrt{3}}{6} 11'$  और दूसरे कोणों पर  $11' \sqrt{\frac{13}{12}}$  है।

मान लो  $ABC$  दंडों से बना हुआ त्रिभुज है, और  $D$  भुजा  $BC$  का मध्य-बिन्दु है जहाँ पर यह सम्हाला गया है।

मान लो  $A$  पर दंड  $AB$  पर कब्जे की क्रिया दो अवयव बलों, क्रमसे  $2'$  और  $X$  के बराबर हैं जो ऊर्ध्वावर और क्षैतिज दिशाओं में कार्य करते हैं; अतः  $AC$  पर कब्जे की क्रिया इन अवयव बलों के बराबर और विपरीत होगी।

क्योंकि पूरा में समुदाय  $D$  खींची गई ऊर्ध्वावर रेखा पर सममित है, इसलिये  $B$  पर क्रिया भी  $X$  और  $X'$  अवयव बलों के बराबर होगी, जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है।

मान लो  $CB$  पर कब्जे  $C$  की क्रिया, ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा में  $Y_1$  और दाईं ओर क्षैतिज दिशा में  $X_1$  के बराबर है, तो  $CA$  पर उसी कब्जे की क्रिया इनके विपरीत दो अवयव बलों के बराबर होगी जैसा चित्र में दिखलाया गया है।



$AB$  के लिये ऊर्ध्वाधर दिशा में विश्लेषित किया, तो

$$S = W + 2Y \quad \dots \quad (1),$$

जहाँ पर  $S$  खूंटो  $D$  पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया है।

$CB$  के लिये, क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं में विश्लेषित किया और  $C$  पर घूर्णन लिया, तो

$$X + X_1 = 0 \quad \dots \quad (2),$$

$$W = Y + Y_1 \quad \dots \quad (3),$$

$$\text{और } W \cdot a \cos 60^\circ + X \cdot 2a \sin 60^\circ = Y \cdot 2a \cos 60^\circ \dots (4).$$

$CA$  के लिये, ऊर्ध्वाधर दिशा में विश्लेषित किया, तो

$$W = Y - Y_1 \quad \dots \quad (5).$$

समीकरण (३) और (५) से,

$$Y_1 = 0, \text{ और } Y = W.$$

अतः समीकरण (४) से,

$$X = \frac{1}{2} W \cos 60^\circ = \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} W.$$

इसलिये (२) से,

$$X_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6} W.$$

और (१) से,

$$S = 3 W.$$

अतः  $B$  पर कब्जे की क्रिया बल  $\sqrt{X^2 + Y^2}$  (अर्थात्  $W\sqrt{1+\frac{3}{4}}$ ) के बराबर है, जो क्षैतिज से कोण स्पज्या  $^{-1}\frac{Y}{X}$  (अर्थात् स्पज्या  $^{-1}213$ ) बनाती है, और  $C$  पर कब्जे की क्रिया  $\frac{\sqrt{3}}{6} W$  के बराबर एक क्षैतिज बल है।

थोड़ा सा विचार करने से हमें मालूम हो जाता है कि  $C$  पर कब्जे की क्रिया क्षैतिज होनी चाहिये, क्योंकि पूरा समुदाय  $CD$  रेखा पर सममित है, और जबतक अवयव बल  $X_1$  शून्य न हो  $C$  पर प्रतिक्रिया सममित के नियम को सन्तुष्ट नहीं कर सकती।

### उदाहरणमाला ३६

१।  $AB$  और  $BC$  दो बराबर सम छड़ें  $B$  पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़ी हुई हैं। दीवार के एक बिन्दु पर एक कब्जे से  $A$  नियत है जिसके चारों ओर  $AB$  स्वतंत्रतापूर्वक ऊर्ध्वाधर घरातल में घूम सकती है। बताओ दोनों छड़ों को एक ही क्षैतिज रेखा में रखने के लिये  $BC$  के किम बिन्दु पर एक ऊर्ध्वाधर बल लगाया जाय और उस बल का परिमाण क्या होगा?

२।  $AC$  और  $CB$  दो सम छड़ें, एक चिकने कब्जे द्वारा  $C$  पर जुड़ी हुई हैं, और उनके सिरे एक ही क्षैतिज रेखा में  $A$  और  $B$  दो बिन्दुओं से लगे हुये हैं। यदि छड़ें एक ही पदार्थ की बनी हो और उनका कुल भार 60 पौ० हों, और यदि प्रत्येक क्षैतिज से  $60^\circ$  का कोण बनाती हो तो सिद्ध करो कि बिन्दु  $C$  पर कब्जे की क्रिया  $5\sqrt{3}$  पौ० भार का एक क्षैतिज बल होगा।

३। एक परकार, जिसकी प्रत्येक भुजा  $W$  भार का एक सम दंड है, एक ही क्षैतिज रेखा में दो चिकनी खूंटियों पर इस प्रकार रुकी हुई है कि उसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दु खूंटियों पर हैं और कब्जा नीचे की ओर



है, और एक बिना भार का दंड उसकी भुजाओं के सिरों को इस प्रकार मिलाता है कि भुजाएँ एक दूसरे से  $2\alpha$  कोण बनाती हुई अलग अलग रहती हैं। सिद्ध करो कि इस दंड पर दबाव और कब्जे पर क्रिया दोनों ही  $\frac{1}{4}W$  कोस्युज्या के बराबर हैं।

४।  $AB$  और  $AC$  दो बराबर सम दंड, जिनमें से प्रत्येक का भार  $W$  है  $A$  पर चिकने कब्जे द्वारा जुड़े हुये एक ऊर्ध्वाधर धरातल में हैं। उनके  $B$  और  $C$  सिरे एक चिकनी मेज पर टिके हुये हैं। एक डोरी जो  $C$  को  $AB$  के मध्य-बिन्दु से मिलाती है उनको समतुलित अवस्था में रखे हुये हैं। यदि प्रत्येक दंड का क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है, तो सिद्ध करो कि डोरी का तनाव और  $A$  पर दंडों के प्रतिकूल दोनों ही

$$\frac{W}{4} \text{ कोस्युज्या } \alpha = \sqrt{1+8 \text{ कोस्युज्या}^2 \alpha}$$

के बराबर हैं और प्रत्येक क्षैतिज से स्पर्श्या  $-\alpha$  ( $\frac{1}{2}$  स्पर्श्या  $\alpha$ ) कोण बनाते हैं।

५।  $AC$  और  $BC$  दो बराबर छड़ें  $C$  पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़ी हैं। इनके सिरे  $A$  और  $B$  एक रूख क्षैतिज धरातल पर इस प्रकार रखे हैं कि  $ABC$  एक ऊर्ध्वाधर धरातल रहता। यदि घर्षण-गुणक  $\frac{1}{2}$  है, तो सिद्ध करो कि कोण  $ABC$  एक समकोण से बड़ा नहीं हो सकता है और किसी भी समतुलित अवस्था में  $C$  पर दबाव मालूम करो।

६।  $AB, BC$  और  $CA$  तीन भारी समदंड जिनकी लम्बाई क्रम से 5, 4, और 3 फुट है, सिरों पर कब्जों द्वारा इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनसे एक त्रिभुज बनजाता है। सिद्ध करो कि वे  $AB$  के मध्य-बिन्दु से  $A$  की ओर  $1\frac{1}{2}$  इंच की दूरी पर एक आलम्ब पर  $AB$  को क्षैतिज रखते हुये समतुलित होंगे।

यह भी सिद्ध करो कि जब दंड समतुलित अवस्था में है  $A$  और  $B$  कब्जों पर क्रियाओं के ऊर्ध्वाधर अवयव बल क्रमसे  $\frac{187}{600} W$  और

$\frac{163}{600} W$  है, जहाँ पर दंडों का कुल भार  $W$  है।

७।  $AB$  और  $BC$  दो बराबर दंड  $B$  पर एक कब्जे द्वारा जुड़े हुये हैं और उनके मध्य-बिन्दुओं से एक इतनी लम्बी डोरी बंधी हुई है कि जब वह तनी रहती है तो कोण  $ABC$  एक समकोण होता है। यदि समुदाय  $A$  बिन्दु से स्वतंत्रतापूर्वक लटका हुआ है, तो सिद्ध करो ऊर्ध्वधर से  $AB$  का झुकाव स्पष्ट्या  $30^\circ$  है, और डोरी का तनाव और कब्जे पर क्रिया भी मालूम करो।

८।  $AB$  और  $BC$  दो एक फुट लम्बे दंड हैं, जिनमें से प्रत्येक का भार  $IV$  है। वे  $B$  पर एक कब्जे द्वारा जुड़े हुये हैं और एक नियत खूँटी  $O$  से तीन एक फुट लम्बी डोरियों  $OA$ ,  $OB$  और  $OC$  राह लटके हुये हैं। तीनों डोरियों के तनाव और कब्जे पर क्रिया का परिमाण मालूम करो जब सब डोरियाँ और दंड एक ही धरातल में हैं।

९।  $AB$ ,  $BC$  और  $CD$  तीन सम छड़ें, जिनकी मोटाई बराबर है और जिसकी लम्बाई कम से  $l$ ,  $2l$ , और  $l$  हैं,  $B$  और  $C$  पर चिकने कब्जों द्वारा जुड़े हुई हैं, और एक पूर्ण चिकने गोले पर जिसकी त्रिज्या  $2l$  है, इस प्रकार रखी हुई है कि  $BC$  का मध्य-बिन्दु और  $A$  और  $D$  सिरे गोले को स्पर्श करते हैं। सिद्ध करो  $BC$  के मध्य-बिन्दु पर दबाव छड़ों के भार का  $\frac{91}{100}$  है।

१०।  $AB$ ,  $BC$ , और  $CD$  तीन सम दंड, जिनके भार उनकी लम्बाइयों  $a$ ,  $b$ , और  $c$  के समानुपाती हैं,  $B$  और  $C$  पर कब्जों द्वारा जुड़े हुये हैं और  $P$  और  $Q$  दो खूंटियों पर रखे हुये क्षैतिज अवस्था में हैं।  $B$  और  $C$  जोड़ों पर क्रियायें मालूम करो, और सिद्ध करो कि खूंटियों के बीच की दूरी

$$\frac{a^2}{2a+b} + \frac{c^2}{2c+b} + b$$

होनी चाहिये।

११।  $AB$  और  $AC$  दो समान सम दंड, जिनकी लम्बाई  $a$  है,  $A$  पर चिकने कब्जे द्वारा जुड़े हुये हैं। एक बिना भार का दंड  $BD$ , जिसकी लम्बाई

$b$  है,  $B$  पर चिकने कब्जे द्वारा जुड़ा हुआ है और  $D$  पर एक चिछले में, जो  $AC$  पर सरकता है, बंधा हुआ है। पूरा समुदाय एक छोटी चिकनी पिन पर लटका हुआ है। सिद्ध करो कि दंड ऊर्ध्वाधर से कोण

$$\text{स्पष्टतया } = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$$

बनाता है।

१२। चार बराबर सम छड़ों से, जो एक दूसरे से कब्जों द्वारा जुड़े हुए हैं, एक वर्गाकार चित्र  $ABCD$  बनता है जो जोड़  $A$  से लटका हुआ है।  $A$  और  $C$  को मिलाती हुई एक डोरी इन्हें वर्ग के आकार रखे हुये हैं। सिद्ध करो कि डोरी का तनाव चारों दंडों के भार का आधा है।  $B$  अथवा  $D$  जोड़ पर क्रियाओं की दिशाओं और परिमाण मालूम करो।

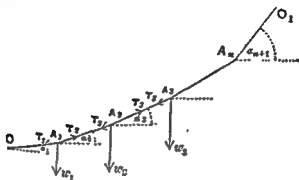
१३। चार बराबर दंड कब्जों द्वारा इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनसे एक सम-चतुर्भुज बनता है। आमने सामने के जोड़ों को डोरियाँ सम-चतुर्भुज के विकर्ण बनाती हुई मिलाती हैं। पूरा समुदाय एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि डोरियों के तनाव लम्बाइयों में एक ही निष्पत्ति है।

२१४--संयोग बहुभुज। यदि किसी हल्की डोरी के सिरे दो नियत बिन्दुओं से बंधे हों और यदि डोरी के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर भार लगे हों, तो डोरी से बने हुये चित्र को संयोग बहुभुज कहते हैं।

मान लो  $O$  और  $O_1$  दो नियत बिन्दु हैं जिन पर डोरी के सिरे बंधे हुये हैं, और मान लो डोरी पर  $A_1, A_2, A_3$  वे बिन्दु हैं जिन पर क्रमशः  $w_1, w_2, \dots, w_n$  भारों के पिंड बंधे हुये हैं।

मान लो  $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nO_1$  भागों की लम्बाइयाँ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$  हैं, और मान लो क्षैतिज से उन  $\alpha_{n+1}$  हैं।

मान लो बिन्दु  $O$  और  $O_1$  के बीच की क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दूरियाँ क्रम से  $h$  और  $k$  हैं, इसलिये



$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \dots + a_{n+1} \cos \alpha_{n+1} = h \quad \dots (1),$$

$$\text{और } a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \dots + a_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = k \quad \dots (2).$$

मान लो डोरी के भागों के तनाव क्रमसे  $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$  हैं।

भिन्न भिन्न भारों की समतुलित अवस्था में ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाओं में उत्तरोत्तर विश्लिष्ट करने पर

$$T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = w_1, \text{ और } T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0;$$

$$T_3 \sin \alpha_3 - T_2 \sin \alpha_2 = w_2, \text{ और } T_3 \cos \alpha_3 - T_2 \cos \alpha_2 = 0;$$

$$T_4 \sin \alpha_4 - T_3 \sin \alpha_3 = w_3, \text{ और } T_4 \cos \alpha_4 - T_3 \cos \alpha_3 = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$T_{n+1} \sin \alpha_{n+1} - T_n \sin \alpha_n = w_n,$$

$$\text{और } T_{n+1} \cos \alpha_{n+1} - T_n \cos \alpha_n = 0.$$

यह  $2n$  समीकरण और समीकरण (१) और (२) मिल कर  $(n+1)$  अज्ञात तनावों और  $(n+1)$  अज्ञात भुकावों के निकालने के लिये पर्याप्त हैं।

समीकरणों के दाएँ पक्षों में,

$$T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 = T_3 \cos \alpha_3 = \dots = T_{n+1} \cos \alpha_{n+1} = K (\text{मान लो}) \quad \dots (3).$$

४ है,  $B$  पर चिकने कब्जे द्वारा जुड़ा हुआ है और  $D$  पर एक चिकने छन्ने में, जो  $AC$  पर सरबत्ता है, बंधा हुआ है। पूरा समुदाय  $A$  में एक छोटी चिकनी पिन पर लटका हुआ है। सिद्ध करो कि दंड  $AC$  ऊर्ध्वाधर में कोण

$$\sin^{-1} \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$$

बनाता है।

१२। चार बराबर सम छड़ों में, जो एक दूसरे में कब्जों द्वारा जुड़े हुये हैं, एक वर्गाकार चित्र  $ABCD$  बनता है जो जोड़  $A$  से लटका हुआ है।  $A$  और  $C$  को मिलाती हुई एक डोरी इन्हें वर्ग के आकार में रखे हुये है। सिद्ध करो कि डोरी का तनाव चारों दंडों के भार का आधा है।  $B$  अथवा  $D$  जोड़ पर क्रियाओं की दिशायें और परिमाण मालूम करो।

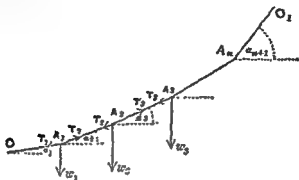
१३। चार बराबर दंड कब्जों द्वारा इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनसे एक सम-चतुर्भुज बनता है। सामने सामने के जोड़ों की डोरियाँ सम-चतुर्भुज के विकर्ण बनाती हुई मिलाती हैं। पूरा समुदाय एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि डोरियों के तनाव लम्बाइयों में एक ही निष्पत्ति है।

२१४--संयोग बहुभुज। यदि किसी हल्की डोरी के सिरे दो निश्च विन्दुओं से बंधे हों और यदि डोरी के भिन्न भिन्न विन्दुओं पर भार लगे हों, तो डोरी से बने हुये चित्र को संयोग बहुभुज कहते हैं।

मान लो  $O$  और  $O_1$  दो निश्च विन्दु हैं जिन पर डोरी के सिरे बंधे हुये हैं, और मान लो डोरी पर  $A_1, A_2, \dots, A_n$  वे विन्दु हैं जिन पर क्रमशः  $w_1, w_2, \dots, w_n$  भारों के पिंड बंधे हुये हैं।

मान लो  $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nO_1$  भागों की लम्बाइयाँ क्रम से  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$  हैं, और मान लो क्षैतिज से उनके झुकाव  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  हैं।

मान लो बिन्दु  $O$  और  $O_1$  के बीच की क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दूरियाँ क्रम से  $h$  और  $k$  हैं, इसलिये



$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \dots + a_{n+1} \cos \alpha_{n+1} = h \quad \dots (1),$$

$$\text{और } a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \dots + a_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = k \quad \dots (2).$$

मान लो डोरी के भागों के तनाव क्रमसे  $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$  है।

भिन्न भिन्न भारों की समतुलित अवस्था में ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाओं में उत्तरोत्तर विदिलिप्त करने पर

$$T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = w_1, \text{ और } T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = 0;$$

$$T_3 \cos \alpha_3 - T_2 \cos \alpha_2 = w_2, \text{ और } T_3 \sin \alpha_3 - T_2 \sin \alpha_2 = 0;$$

$$T_4 \cos \alpha_4 - T_3 \cos \alpha_3 = w_3, \text{ और } T_4 \sin \alpha_4 - T_3 \sin \alpha_3 = 0;$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$T_{n+1} \cos \alpha_{n+1} - T_n \cos \alpha_n = w_n,$$

$$\text{और } T_{n+1} \sin \alpha_{n+1} - T_n \sin \alpha_n = 0.$$

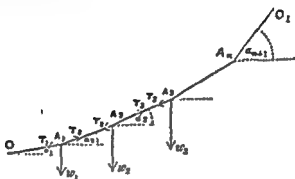
यह  $2n$  समीकरण और समीकरण (१) और (२) मिल कर  $(n+1)$  अज्ञात तनावों और  $(n+1)$  अज्ञात भुकावों के निकालने के लिये पर्याप्त है।

समीकरणों के दायें पक्षों से,

$$T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 = T_3 \cos \alpha_3 = \dots = T_{n+1} \cos \alpha_{n+1} = K (\text{मान लो}) \quad \dots (3).$$

अतः डोरी के तनाव का क्षैतिज अवयव स्थिर रहता है और यह  $K$  में सूचित किया जाता है।

समोत्तरण के चारों पक्षों में (३) में निकाले गये  $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$  मान रखने पर



$$\text{स्पज्या } \alpha_n - \text{स्पज्या } \alpha_1 = \frac{w_1}{K},$$

$$\text{स्पज्या } \alpha_3 - \text{स्पज्या } \alpha_2 = \frac{w_2}{K},$$

$$\text{स्पज्या } \alpha_4 - \text{स्पज्या } \alpha_3 = \frac{w_3}{K},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{स्पज्या } \alpha_{n+1} - \text{स्पज्या } \alpha_n = \frac{w_n}{K}.$$

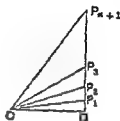
यदि सब भार बराबर हैं तो इन समीकरणों के सब दाहिने पक्ष भी बराबर होंगे और इसलिये यह परिणाम निकलता है कि स्पज्या  $\alpha_1$ , स्पज्या  $\alpha_2$ , स्पज्या  $\alpha_{n+1}$  समानान्तर श्रेणी में हैं।

अतः यदि किसी डोरी के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर कुछ बराबर भार लगा दिये जायें, जैसा कि ऊपर किया गया है, तो डोरी के उत्तरोत्तर भागों के क्षैतिज से झुकाव की स्पज्यायें समानान्तर श्रेणी में होंगी जिनका पदान्तर, किसी कण के भार और डोरी के स्थिर क्षैतिज तनाव का भजनफल होगा।

२१५—लेखाचित्रीय रचना । यदि संयोग बहुभुज में, डोरियों के भिन्न भिन्न भागों के भुकाव ज्ञात हों, तो हम ज्यामितीय रचना द्वारा  $w_1, w_2, \dots, w_n$  को निष्पत्तियाँ आसानी से मालूम कर सकते हैं ।

मान लो  $C$  कोई बिन्दु है और  $C$  से खींची हुई क्षैतिज रेखा  $CD$  है ।  $CP_1, CP_2, \dots, CP_{n+1}$  को  $OA_1, A_1A_2, \dots, A_nO_1$  डोरियों के समानान्तर खींचो, इसलिये कोण  $P_1CD, P_2CD, \dots$  क्रम से  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  होंगे ।

इन रेखाओं को  $D, P_1, P_2, \dots$  पर काटती हुई कोई ऊर्ध्वाधर रेखा खींचो ।



अब पिछली धारा से,

$$\frac{w_1}{K} = \text{स्पज्या } \alpha_2 - \text{स्पज्या } \alpha_1 = \frac{DP_2}{CD} - \frac{DP_1}{CD} = \frac{P_1P_2}{CD},$$

$$\frac{w_2}{K} = \text{स्पज्या } \alpha_3 - \text{स्पज्या } \alpha_2 = \frac{DP_3}{CD} - \frac{DP_2}{CD} = \frac{P_2P_3}{CD},$$

इत्यादि ।

अतः  $K, w_1, w_2, \dots, w_n$  राशियाँ क्रम से  $CD, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_{n+1}$  रेखाओं के समानुपाती हैं और इसलिये यह निष्पत्तियाँ निकाली जा सकती हैं ।

ये-फल इस बात से भी मालूम हो जाते हैं कि  $A_1$  पर लगे हुये भार के लिये  $CP_2P_1$  बल-त्रिभुज है, इसी-प्रकार  $A_2$  पर लगे हुये भार के लिये  $CP_3P_2$  बल-त्रिभुज है, इत्यादि ।

इसी प्रकार, यदि जोड़ों पर लटके हुये भार दिये हुये हों, और किन्हीं दो डोरियों की दिशाएँ भी ज्ञात हों, तो हम दूसरी डोरियों की दिशाएँ भी निकाल सकते हैं । हम एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचते हैं, और उस पर भार  $W_1, W_2, \dots$  के अनुपात में  $P_1P_2, P_2P_3, \dots$  नाप लेते हैं । यदि  $OA_1, A_1A_2$  डोरियों की दिशाएँ दी गई हों, तो हम इनके समानान्तर  $P_1O, P_2O$  खींचते



है और इस प्रकार बिन्दु  $O$  निकाल लेते हैं। यदि  $O$  को  $P_3, P_4$ ... इत्यादि से मिला दें तो शेष डोरियों की दिशाएँ मालूम हो जाती हैं।

२१६—स्थिति-स्थापक तारों के तनाव। इस पुस्तक में अब तक हमने तारों और डोरियों को अतन्य माना है, अर्थात् ऐसा माना है कि उनकी लम्बाई बिना बढ़े हुये ही वे कितना ही तनाव सम्हाल सकती हैं।

व्यवहार में, सभी तार तन्य होते हैं यद्यपि बहुत सी दशाओं में उनकी तन्यता बहुत ही कम अर्थात् उपेक्षणीय होती है। जब तार की तन्यता उपेक्षणीय नहीं होती तो एक सरल प्रयोगात्मक नियम है जो तार के तनाव को उसके वितान से सम्बद्ध करता है। वह इस प्रकार है।

किसी स्थिति-स्थापक तार का तनाव उसकी वास्तविक लम्बाई के अतिरिक्त वितान के अनुपात में होता है।

मान लो एक तार की प्राकृतिक लम्बाई एक फुट है तो उसकी लम्बाई 13 इंच और 15 इंच होने पर उसके तनावों की निष्पत्ति 13—12: 15—12 अर्थात् 1:3 होगी।

इस नियम की प्रयोगात्मक जाँच इस प्रकार की जा सकती है; एक सर्पिलाकार स्प्रिंग (कमानी) अथवा एक रबड़ का फीता लो। उसका एक सिरा  $A$  किसी नियत बिन्दु से लगा दो और उसके दूसरे सिरे  $B$  पर भार लगाओ, तथा भारों से जो वितान हों उन्हें देखो, तो मालूम होगा कि यह वितान लगभग भारों के अनुपात में है। भारों के परिमाण स्प्रिंग अथवा रबड़ के फीते की मजबूती पर निर्भर है। सबसे बड़ा भार इतना अधिक नहीं होना चाहिये कि वह स्प्रिंग अथवा फीते को विरूप कर दे।

२१७—विद्यार्थी को स्मरण रखना चाहिये कि तार का तनाव उसकी तनी हुई लम्बाई के अनुपात में नहीं होता परन्तु उसके वितान के अनुपात में होता है।

इस नियम को हुक (१६३५—१७०३ ई०) ने मालूम किया था और इस रूप में अपनी पुस्तक (*Ut tensio, sic vis*) उत् टेन्सियो जिकविस में दिया था। इससे हम आसानी से यह सूत्र मालूम कर सकते हैं जिससे वितान किसी भी अवस्था में मालूम किया जा सकता है।

मान लो तार की बिना तनी हुई लम्बाई  $a$  है और  $T$  उसका तनाव है जब उसकी लम्बाई तान कर  $x$  कर दी गई हो। अब क्योंकि वितान  $x-a$  है, इसलिये नियम बतलाता है कि

$$T \propto x-a.$$

इसे प्रायः  $T = \lambda \cdot \frac{x-a}{a},$

रूप में व्यक्त करते हैं इस फल में  $\frac{\lambda}{a}$  अचल राशि है।

राशि  $\lambda$  केवल तार की मोटाई और जिस पदार्थ से वह बना हुआ हो, उस पर निर्भर रहती है, और इसे तार का स्थिति-स्थापन-मापक कहते हैं।

यह उस बल के बराबर होता है जो एक चिकनी मेंछ पर रखे हुये, तार को, प्राकृतिक लम्बाई की दुगनी के बराबर तान देगा; क्योंकि जब  $x=2a$ , तो तनाव

$$= \lambda \frac{2a-a}{a} = \lambda.$$

कोई भी स्थिति-स्थापक तार असीम तनाव नहीं सह सकता है। जब कोई तार ताने जाने पर टूटने की सीमा पर होता है तो उसके तनाव को सीमान्त तनाव कहते हैं।

हुक का नियम फौलाद और दूसरे धातु की बनी छड़ों के लिये भी सही है, परन्तु इनमें वह वितान जिसके लिये यह सही होता है बहुत कम होता है। हम किसी छड़ को उसकी प्राकृतिक लम्बाई की दुगनी के बराबर नहीं खींच सकते; परन्तु  $\lambda$  उस बल का सौ गुना होगा जो छड़ को उसकी प्राकृतिक लम्बाई का  $\frac{1}{100}$  वाँ बढ़ा देता है। क्योंकि यदि

$$x-a = \frac{a}{100}, \text{ तो } T = \frac{\lambda}{100}.$$

$T$  का मान छड़ की मोटाई पर भी निर्भर होता है और छड़ को प्रायः ऐसा लेंते हैं जिसका परिच्छेद एक वर्ग इंच हो। इसलिये एक फौलादी छड़ का स्थिति-स्थापन-मापक लगभग 13500 टन प्रति वर्ग इंच होता है।

धारा १३४ की विधि से यह आसानी से मालूम हो जायगा कि किसी स्थिति-स्थापक तार के तानने में जो काम होता है वह बितान और प्रारम्भिक और अन्तिम तनावों के मध्यमान के गुणनफल के बराबर होता है ।

उदाहरण ।  $ABC$  एक स्थिति-स्थापक तार है, जो एक नियत बिन्दु  $A$  से ऊर्ध्वाधर लटका हुआ है ।  $B$  और  $C$  से क्रम से  $2W$  और  $W$  भार के कण लगे हुये हैं । यदि तार का स्थिति-स्थापन-मापक  $3W$  है, तो तार के भागों की तनी हुई लम्बाइयों की उनकी बिना तनी हुई लम्बाइयों से निष्पत्तियाँ मालूम करो ।

मान लो  $AB$  और  $BC$  की बिना तनी हुई लम्बाइयाँ  $c$  और  $c_1$  हैं और उनकी तनी हुई लम्बाइयाँ  $x$  और  $y$  हैं ।

मान लो  $T$  और  $T_1$  उनके तनाव हैं, इसलिये

$$T = \lambda \frac{x-c}{c} = 3W \frac{x-c}{c},$$

और 
$$T_1 = \lambda \frac{y-c_1}{c_1} = 3W \frac{y-c_1}{c_1}.$$

चूँकि  $B$  और  $C$  समतुलित अवस्था में हैं, इसलिये

$$T - T_1 = 2W, \text{ और } T_1 = W.$$

अतः 
$$T = 3W.$$

$$\therefore 3W \frac{x-c}{c} = 3W, \text{ और } 3W \frac{y-c_1}{c_1} = W.$$

$$\therefore x = 2c, \text{ और } y = \frac{4}{3}c_1.$$

अतः तनी हुई लम्बाइयाँ क्रमसे प्राकृतिक लम्बाइयों की दुगुनी और चार तिहाई हैं ।

### उदाहरणमाला ३७

१।  $ABC$  एक स्थिति-स्थापक तार है, जिसका स्थापन-मापक  $4W$  है, और जो एक नियत बिन्दु  $A$  पर बँधा हुआ है ।  $B$  और  $C$  पर  $W$  के बराबर भार लगे हुये हैं और  $AB$  और  $BC$  की बिना तनी हुई लम्बाई



$c$  के बराबर है। सिद्ध करो कि, यदि तार और भार समतुलित अवस्था में ऊर्ध्वापर रहते हैं, तो  $AB$  और  $BC$  की तनी हुई लम्बाइयाँ क्रमसे  $\frac{3}{2}c$  और  $\frac{5}{2}c$  होंगी।

२। एक स्थिति-स्थापक तार के सिरे एक ही क्षैतिज धरातल में दो बिन्दुओं से बंधे हुये हैं, और आरम्भ में वह ठीक सीधा परन्तु बिना तना हुआ है। एक कण, जिसका भार  $W$  है तार के मध्य-बिन्दु से बाँध दिया गया है। यदि स्थिति-स्थापन-मापक  $\frac{W}{\sqrt{3}}$  है, तो सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में तार के दोनों भागों में  $60^\circ$  का कोण होगा।

३। पिछले प्रश्न में यदि दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी  $2a$  है, तार की बिना तनी हुई लम्बाई  $2c$  है और स्थिति-स्थापन-मापक  $\lambda$  है, तो सिद्ध करो कि ऊर्ध्वापर से तार का झुकाव  $\theta$  समीकरण

$$\frac{W}{2\lambda} \sin \theta + \cos \theta = \frac{a}{c}$$

से दिया जाता है।

४। एक पिंड एक रूक्ष आनत धरातल पर जिसका क्षैतिज से झुकाव घर्षण-कोण  $\lambda$  से अधिक है, रखा हुआ है; उससे एक स्थिति-स्थापक तार बँधा हुआ है जो उसे समतुलित अवस्था में रखे हुये है और जिसका दूसरा सिरा धरातल में एक बिन्दु से बँधा हुआ है। यदि स्थिति-स्थापन-मापक पिंड के भार के बराबर है, तो सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में तार की लम्बाई की उसकी मौलिक लम्बाई से निष्पत्ति

$$1 + \cos(\alpha - \lambda) \text{ व्युत्कोज्या } \lambda \text{ है।}$$

५। चार बराबर कन्जों द्वारा जुड़े हुये दंड, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई  $a$  है, एक शीर्ष-बिन्दु से लटके हुये हैं, जाँ सामने के शीर्ष से एक स्थिति-स्थापन तार से बँधा हुआ है। यदि दंड एक वर्ग के आकार में लटके हों और यदि तार का स्थिति-स्थापन-मापक एक दंड के भार के बराबर है, तो सिद्ध करो कि तार की बिना तनी लम्बाई  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$  होगी।

६। एक स्थिति-म्यापक तार, जिसकी प्राकृतिक लम्बाई 10 इंच है, 5 पौं० भार के एक बल से 15 इंच की लम्बाई तक ताना जा सकता है। बताओ 12 इंच की लम्बाई से 15 इंच की लम्बाई तक उसे तानने में कितना कर्म करना पड़ेगा।

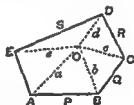
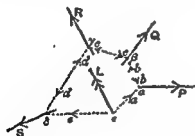
७। एक सर्पिलाकार स्प्रिंग (कमानी) को एक इंच तानने में एक पौंड भार का बल लगाना होता है। उसे 3 इंच अधिक तानने में कितना कर्म करना पड़ेगा ?

### रेखा-चित्रीय रचनायें

२१—समतलीय बलों का परिणामीबल मालूम करना।

मान लो बल  $P, Q, R$ , और  $S$  हैं जिनकी त्रिज्या-रेखायें धार्य चित्र में दिखलाई गई हैं।

चित्र  $ABCDE$  खींचो जिसकी भुजायें  $AB, BC, CD$ , और  $DE$  क्रमसे  $P, Q, R$ , और  $S$  के समानान्तर और अनुपातीय हैं।  $AE$  को मिला दो, इसलिये बल बहुभुज से  $AE$  इष्ट परिणामीबल को परिमाण और दिशा में, प्रदर्शित करेगा।



कोई बिन्दु  $O$  लो और उसे  $A, B, C, D$ , और  $E$  से मिलाओ। मान लो इन मिलाने वाली रेखाओं की लम्बाइयाँ क्रम से  $a, b, c, d$ , और  $e$  हैं।

$P$  को त्रिज्या-रेखा पर कोई बिन्दु  $\alpha$  लो।  $\alpha\beta$  को  $BO$  के समानान्तर खींचो जो  $Q$  को  $\beta$  पर मिले।  $\beta\gamma$  को  $CO$  के समानान्तर खींचो जो  $R$  को  $\gamma$  पर मिले, और  $\gamma\delta$  को  $DO$  के समानान्तर खींचो जो  $S$  को  $\delta$  पर मिले।

$\delta$  और  $\alpha$  से क्रम से  $EO$  और  $OA$  के समानान्तर रेखायें खींचो जो एक दूसरे को  $e$  पर मिले।

$e$  से  $eL$  को  $AE$  के समानान्तर और बराबर खींचो। अब  $eL$  इष्ट परिणामीबल को परिमाण और क्रिया-रेखा में उसी पैमाने पर प्रदर्शित करेगी जिस पैमाने पर  $AB, P$  को प्रदर्शित करती हैं।

क्योंकि  $P$ , जो  $AB$  से प्रदर्शित किया गया है,  $AO$  और  $OB$  से प्रदर्शित किये गये बलों के बराबर है, इसलिये उसके स्थान पर  $\epsilon\alpha$  और  $\beta\alpha$  दिशा में  $a$  और  $b$  के बराबर बल रखे जा सकते हैं। इसी प्रकार  $Q$  के स्थान पर  $\alpha\beta$  और  $\gamma\beta$  दिशा में  $b$  और  $c$  के बराबर बल,  $R$  के स्थान पर  $\beta\gamma$  और  $\delta\gamma$  दिशा में  $c$  और  $d$  के बराबर बल, और  $S$  के स्थान पर  $\gamma\delta$  और  $\epsilon\delta$  दिशा में  $d$  और  $e$  के बराबर बल रखे जा सकते हैं।

इस प्रकार बल  $P, Q, R$ , और  $S$  के स्थानों पर चित्र  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$  की भुजाओं की सीध में बल, रखे जा सकते हैं जिनमें से  $\alpha\beta, \beta\gamma$ , और  $\gamma\delta$  समतुलित हैं।

अतः अब हमारे पास वे बल रह गये जो  $e$  पर कार्य करते हैं और  $AO$  और  $OE$  के समानान्तर हैं और जिनका परिणामीबल  $AE$  है।

क्योंकि  $eL$  को  $AE$  के समानान्तर और बराबर खींचा गया है, इसलिये यह ही परिणामीबल के परिमाण और क्रिया-रेखा को प्रदर्शित करता है।

ऐसे चित्र को जैसा कि  $ABCDE$  है, बल-बहुभुज कहते हैं, और ऐसे चित्र को जैसा कि  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$  है संयोग-बहुभुज कहते हैं।

२११—यदि बल-बहुभुज का बिन्दु  $E, A$  पर पड़े, तो बहुभुज वन्द हो जाता है और सब परिणामीबल शून्य हो जाता है।

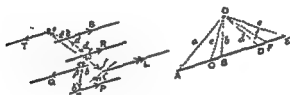
यदि बल-बहुभुज तो वन्द है, परन्तु संयोग-बहुभुज वन्द नहीं है, अर्थात् यदि  $\delta\epsilon\alpha$  एक सरल रेखा नहीं है, तो हमारे पास  $OE$  और  $AE$  के समानान्तर  $\delta$  और  $\alpha$  पर कार्य करते हुये दो बल रह जाते हैं अर्थात्

हमारे पान दो बराबर परन्तु विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये समानान्तर चल रह जाते हैं जो एक बलमुग्म के बराबर हैं ।

यदि संयोग-बहुभुज भी बन्द होना, तो  $\Delta abc$  एक सरल रेखा होती और विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये ये दोनों बराबर समानान्तर चल एक ही सरल रेखा में होंगे और इसलिये समतुलित होंगे ।

अतः यदि बल  $P, Q, R, S$  समतुलित हैं, तो उनके बल-बहुभुज और संयोग-बहुभुज दोनों ही बन्द होंगे ।

२२०—यदि बल समानान्तर हैं तो भी रचना वही होगी जैसी कि पिछली धारा में है । नीचे का चित्र उस स्थिति के लिये खींचा गया है जब



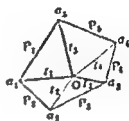
बल समानान्तर हैं और पाँच में से दो बल दोष तीन बलों से विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं ।

चूँकि  $P, R$ , और  $S$  एक ही दिशा में हैं, इसलिये  $AB, CD$ , और  $DE$  एक ही दिशा में होंगी, और  $BC$  और  $EF$ , जो  $Q$  और  $T$  को प्रदर्शित करती हैं, विपरीत दिशा में होंगी ।

रचना का प्रमाण वैसा ही है जैसा पिछली धारा में है । रेखा  $EL$  जो  $AF$  के बराबर और समानान्तर है, इष्ट परिणामीबल को परिमाण और क्रिय-रेखा में प्रदर्शित करती है ।

इस रचना का प्रयोग कुछ भारों के परिणामी भार मालूम करने में भी किया जाता है ।

२२१-—एक छहों के एक मन्द बहुभुज पर जो एक दूसरे में मिलें पर समानान्तर जुड़े हुये हैं, एक बहुभुज बनाया गया है जो उनके जोड़ों पर, जो समतुल्य हैं, कार्य करता है; इसको पर कार्य करता हुआ दिखाये गाना रहे।



मान लो  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_6A_1$  पाँच छहों का एक समुदाय है जो अपने गिरों पर समानान्तरापूर्वक जुड़ा हुआ है और मान लो दिये हुये बल  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  और  $P_6$  इस प्रकार लगाये गये हैं जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

मान लो छहों पर कार्य करती हुई क्रियायें  $l_1, l_2, l_3, l_4$  और  $l_5$  हैं, जैसा कि चित्र में बिन्दु द्वारा दिखाया गया है।

बहुभुज  $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$  गोचो त्रिभुजों भुजायें बल  $P_1, P_2, \dots, P_6$  के समानान्तर और अनुपात में हैं। क्योंकि बल समतुल्य हैं इसलिये यह बहुभुज एक मन्द चित्र होगा।

$a_1$  में  $a_1O, A_1A_2$  के, और  $a_2$  में  $a_2O, A_2A_3$  के समानान्तर लीचो।

अब त्रिभुज  $a_1Oa_2$  की भुजायें  $P_1, l_1$  और  $l_2$  बलों के जो जोड़  $A_1$  पर कार्य करते हैं, समानान्तर हैं। इसलिये इसकी भुजायें इन बलों के अनुपात में हैं। अतः उसी पैमाने पर जिसपर  $a_2a_1, P_1$  को प्रदर्शित करती है, भुजायें  $Oa_2$  और  $a_1O, l_2$  और  $l_1$  को प्रदर्शित करेंगे।

$Oa_2, Oa_3$  और  $Oa_4$  को मिला दो।

$a_1a_2$  और  $Oa_1$  भुजायें  $P_2$  और  $l_1$  बलों को जो  $A_2$  पर कार्य करते

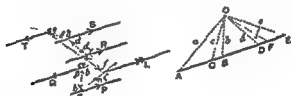


हमारे पास दो बराबर परन्तु विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये समानान्तर बल रह जाते हैं जो एक बलयुग्म के बराबर हैं ।

यदि संयोग-बहुभुज भी बन्द होता, तो  $dec$  एक सरल रेखा होती और विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये ये दोनों बराबर समानान्तर बल एक ही सरल रेखा में होंगे और इसलिये समतुलित होंगे ।

अतः यदि बल  $P, Q, R, S$  समतुलित हैं, तो उनके बल-बहुभुज और संयोग-बहुभुज दोनों ही बन्द होंगे ।

२२०—यदि बल समानान्तर हैं तो भी रचना वही होगी जैसी कि पिछली धारा में है । नीचे का चित्र उस स्थिति के लिये खींचा गया है जब



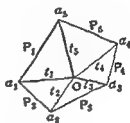
बल समानान्तर हैं और पाँच में से दो बल शेष तीन बलों से विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं ।

चूँकि  $P, R$ , और  $S$  एक ही दिशा में हैं, इसलिये  $AB, CD$ , और  $DE$  एक ही दिशा में होंगी, और  $BC$  और  $EF$ , जो  $Q$  और  $T$  को प्रदर्शित करती हैं, विपरीत दिशा में होंगी ।

रचना का प्रमाण वैसा ही है जैसा पिछली धारा में है । रेखा  $EL$  जो  $AF$  के बराबर और समानान्तर है, इष्ट परिणामीबल को परिमाण और त्रिष-रेखा में प्रदर्शित करती है ।

इस रचना का प्रयोग कुछ भारों के परिणामी भार मालूम करने में भी किया जाता है ।

२२१--हलको छड़ों के एक बन्द बहुभुज पर जो एक दूसरे से सिरों पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं, एक बल-समुदाय लगाया गया है जो उनके जोड़ों पर, जो समतुलित हैं, कार्य करते हैं; छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें मात्तुम करो।



मान लो  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_1$  पाँच छड़ों का एक समुदाय है जो अपने सिरों पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़ा हुआ है और मान लो दिये हुये बल  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , और  $P_5$  इस प्रकार लगाये गये हैं जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है।

मान लो छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें  $t_1, t_2, t_3, t_4$  और  $t_5$  हैं, जैसा कि चित्र में चिन्ह द्वारा दिखलाया गया है।

पंचभुज  $a_1a_2a_3a_4a_5$  खींचो जिसकी भुजायें बल  $P_1, P_2, \dots, P_5$  के समानान्तर और अनुपात में हैं। क्योंकि बल समतुलित हैं इसलिये यह बहुभुज एक बन्द चित्र होगा।

$a_1$  से  $a_1O, A_1A_2$  के, और  $a_5$  से  $a_5O, A_5A_1$  के समानान्तर खींचो।

अब त्रिभुज  $a_5Oa_1$  की भुजायें  $P_1, t_1$  और  $t_5$  बलों के जो जोड़  $A_1$  पर कार्य करते हैं, समानान्तर हैं। इसलिये इसकी भुजायें इन बलों के अनुपात में हैं। अतः उसी पैमाने पर जिसपर  $a_5a_1, P_1$  को प्रदर्शित करती है, भुजायें  $Oa_5$  और  $a_1O, t_5$  और  $t_1$  को प्रदर्शित करेंगी।

$Oa_2, Oa_3$ , और  $Oa_4$  को मिला दो।

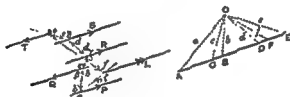
$a_1a_2$  और  $Oa_2$  भुजायें  $P_2$  और  $t_2$  बलों को जो  $A_2$  पर कार्य करते,

हमारे पास दो बराबर परन्तु विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये समानान्तर बल रह जाते हैं जो एक बलयुग्म के बराबर हैं ।

यदि संयोग-बहुभुज भी बन्द होता, तो  $\Delta eac$  एक सरल रेखा होती और विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये ये दोनों बराबर समानान्तर बल एक ही सरल रेखा में होंगे और इसलिये समतुलित होंगे ।

अतः यदि बल  $P, Q, R, S$  समतुलित हैं, तो उनके बल-बहुभुज और संयोग-बहुभुज दोनों ही बन्द होंगे ।

२२०—यदि बल समानान्तर हैं तो भी रचना वही होगी जैसी कि पिछली धारा में है । नीचे का चित्र उस स्थिति के लिये खींचा गया है जब



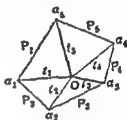
बल समानान्तर हैं और पाँच में से दो बल दोष तीन बलों से विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं ।

चूँकि  $P, R$ , और  $S$  एक ही दिशा में हैं, इसलिये  $AB, CD$ , और  $DE$  एक ही दिशा में होंगी, और  $BC$  और  $EF$ , जो  $Q$  और  $T$  को प्रदर्शित करती हैं, विपरीत दिशा में होंगी ।

रचना का प्रमाण यही है जैसा पिछली धारा में है । रेखा  $EL$  जो  $AF$  के बराबर और समानान्तर है, इष्ट परिणामीबल को परिमाण और दिश-रेखा में प्रदर्शित करती है ।

इस रचना का प्रयोग कुछ भारों के परिणाम भी दिया जाता है ।

२२१-—हल्को छड़ों के एक बन्द बहुभुज पर जो एक दूसरे से सिरों पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं, एक बल-समुदाय लगाया गया है जो उनके जोड़ों पर, जो समतुलित हैं, कार्य करता है; छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें माहूम करें।



मान लो  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_1$  पाँच छड़ों का एक समुदाय है जो अपने सिरों पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़ा हुआ है और मान लो दिये हुये बल  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , और  $P_5$  इस प्रकार लगाये गये हैं जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है।

मान लो छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें  $t_1, t_2, t_3, t_4$  और  $t_5$  हैं, जैसा कि चित्र में बिन्दु द्वारा दिखलाया गया है।

पंचभुज  $a_1a_2a_3a_4a_5$  खींचो जिसकी भुजायें बल  $P_1, P_2, \dots, P_5$  के समानान्तर और अनुपात में हैं। क्योंकि बल समतुलित हैं इसलिये यह बहुभुज एक बन्द चित्र होगा।

$a_1$  से  $a_1O, A_1A_2$  के, और  $a_5$  से  $a_5O, A_5A_1$  के समानान्तर खींचो।

अब त्रिभुज  $a_5Oa_1$  की भुजायें  $P_1, t_1$  और  $t_5$  बलों के जो जोड़  $A_1$  पर कार्य करते हैं, समानान्तर हैं। इसलिये इसकी भुजायें इन बलों के अनुपात में हैं। अतः उसी पैमाने पर जिसपर  $a_5a_1, P_1$  को प्रदर्शित करती हैं, भुजायें  $Oa_5$  और  $a_1O, t_5$  और  $t_1$  को प्रदर्शित करेंगी।

$Oa_2, Oa_3$ , और  $Oa_4$  को मिला दो।

$a_1a_2$  और  $Oa_1$  भुजायें  $P_2$  और  $t_1$  बलों को जो  $A_2$  पर कार्य करते

करते हैं, प्रदर्शित करती हैं। अतः  $a_2O$ , जो त्रिभुज  $a_1Oa_2$  को पूरा करती है, तीसरे बल  $T_2$  को परिमाण और दिशा में प्रदर्शित करती हैं।

इसी प्रकार  $Oa_3$  और  $Oa_4$  कपसे  $T_3$  और  $T_4$  को प्रदर्शित करती हैं।

इसलिये रेखाएँ  $Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4$  और  $Oa_5$  परिमाण और दिशा में, ठाट की भुजाओं पर कार्य करते हुये बलों को प्रदर्शित करती हैं। चित्र  $a_1a_2a_3a_4a_5$  को बल-बहुभुज कहते हैं।

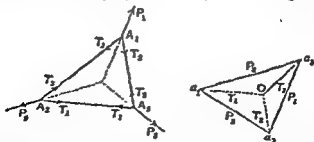
ठाट में कितनी ही भुजाएँ क्यों न हों, इसी प्रकार की रचना उसमें भी की जा सकती है।

२२२—यह स्पष्ट है कि पिछली धारा के चित्र और रचना वास्तव में वही हैं जो धारा २१८ में हैं।

यदि दायीं चित्र  $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, \dots$  छड़ों के ठाट को प्रदर्शित करता है, जिसके जोड़ों पर बल  $a_1O, a_2O, \dots$  पर कार्य करते हैं, तो बायें चित्र का बहुभुज  $A_1A_2A_3A_4A_5$  स्पष्टतः उसका बल-बहुभुज होगा, क्योंकि  $A_1A_2, A_2A_3, \dots$  क्रमसे  $a_1O, a_2O, \dots$  के समानान्तर हैं।

अतः यदि इन दोनों बहुभुजों में से किसी एक को ठाट अथवा संयोग-बहुभुज मान लें तो दूसरा बल-बहुभुज हो जयगा। इसलिये ऐसे चित्रों को एक दूसरे का व्युत्क्रम कहते हैं।

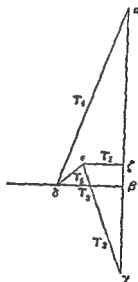
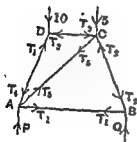
एक और उदाहरण के रूप में हम एक त्रिभुजीय ठाट देते हैं जिसके जोड़ों पर तीन बल  $P_1, P_2, P_3$  कार्य करते हैं और जो समतुलित रहने हैं



और जिसका बल-बहुभुज  $a_1a_2a_3$  है; व्युत्क्रमतः  $A_1A_2A_3$  त्रिभुज  $a_1a_2a_3$  का बल-बहुभुज है जिन पर बल  $T_1, T_2$ , और  $T_3$  कार्य करते हैं।

२२३—उदाहरण १ : हल्की छड़ों का एक ठाट  $ABCD$  जो एक बंधन  $AC$  से कसा हुआ है ऊर्ध्वाधर घातल में  $A$  और  $B$  आलम्बनों पर इस प्रकार से रखा हुआ है कि  $AB$  क्षैतिज है।  $AB, BC, CD$ , और  $DA$  की लम्बाइयाँ क्रम से 4, 3, 2 और 3 फुट हैं।  $AB$  और  $CD$  समानान्तर हैं और  $AD$  और  $BC$  के  $AB$  पर भुकाव बराबर हैं। यदि 5 और 10 हन्डरवेट के भार क्रमशः  $C$  और  $D$  पर रखे जायें तो  $A$  और  $B$  पर आलम्बनों के प्रतिबल और ठाट के मित मित भागों पर कार्य करते हुये बल मालूम करो।

मान लो भुजाओं पर कार्य करते हुये बल इस प्रकार हैं जैसा चित्र में दिखलाया गया है और मान लो  $A$  और  $B$  पर प्रतिबल  $P$  और  $Q$  हैं।



$a\beta$  एक ऊर्ध्वाधर रेखा 5 इंच लम्बी खींचो जो  $D$  पर 10 हन्डरवेट भार को प्रदर्शित करे। फिर  $a\delta$ ,  $AD$  के समानान्तर और  $\beta\delta$ ,  $CD$  के समानान्तर खींचो। तो जोड़  $D$  के लिये  $a\beta\delta$  बल-त्रिभुज होगा और  $D$  पर कार्य करते हुये बल चित्र में दिखलाई गई दिशाओं में होंगी।

यह स्मरण रहे कि छड़  $DC$  में  $C$  पर बल  $DC$  अथवा  $CD$  पर होगा और उसी छड़ में  $D$  पर बल  $CD$  अथवा  $DC$  पर होगा।

[यह एक आवश्यक व्यापक सिद्धान्त है ; क्योंकि कोई छड़ जिस पर दबाव पड़ता है वह या तो संपीड़न होने की प्रवृत्ति का प्रतिरोध करती है या उसमें बढ़ने की प्रवृत्ति होती है।

पहली अवस्था में उसके प्रत्येक सिरे पर क्रिया केन्द्र से सिरों की ओर कार्य करती है और यह स्ट्रट कहलाती है, और दूसरी अवस्था में क्रिया उसके केन्द्र की ओर कार्य करती है और यह टाई कहलाती है।

दोनों ही अवस्थाओं में छड़ के दोनों सिरों पर क्रियाएँ बराबर और विपरीत होती हैं।]

$\beta\gamma$  ऊर्ध्वाधर  $2\frac{1}{2}$  इंच के बराबर लीचो जो  $C$  पर रखे हुये मार को प्रदर्शित करे।  $BC$  के  $\gamma\epsilon$  और  $AC$   $\delta\epsilon$  के समानान्तर लीचो। अब  $\delta\beta\gamma\epsilon\delta$  जोड़  $C$  का बल-बहुभुज है। अतः  $C$  पर क्रियाएँ इस प्रकार हैं जैसा कि चित्र में दिखलाई गई है।

$\epsilon\delta$  को क्षैतिज लीचो जो  $\alpha\gamma$  को  $\delta$  पर मिले।

अब  $\epsilon\gamma\delta$  जोड़  $B$  का बल-त्रिभुज है, इसलिये  $\gamma\delta$  से प्रतिक्रिया  $Q$  और  $\delta\epsilon$  से  $T_1$  प्रदर्शित होता है।

अन्त में जोड़  $A$  का बल-बहुभुज  $\delta\epsilon\delta\alpha\delta$  है, इसलिये  $P$ ,  $\delta\alpha$  से प्रदर्शित होता है।

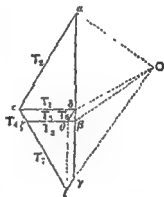
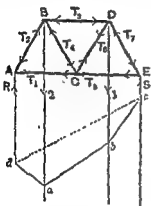
इंचों में नाप कर,  $\epsilon\delta=1.10$ ,  $\gamma\epsilon=3.31$ ,  $\delta\beta=1.77$ ,  $\delta\alpha=5.30$ ,  $\delta\epsilon=91$ ,  $\gamma\delta=3.125$ , और  $\delta\alpha=4.375$ .

अतः चूँकि एक इंच 2 हज़ारवेट को प्रदर्शित करता है, इसलिये हज़ार-वेटों में  $T_1=2.20$ ,  $T_2=6.62$ ,  $T_3=3.54$ ,  $T_4=10.6$ ,  $T_5=1.82$ ,  $Q=6.25$ , और  $P=8.75$ .

यह स्मरण रहे कि  $AB$  और  $AC$  छड़ें तनाव अथवा बढ़ने की अवस्था में हैं अर्थात् वे टाई हैं, और  $AD$  की लंब छड़ें संपीड़न अथवा सिकुड़ने की अवस्था में हैं अर्थात् वे स्ट्रट्स हैं।

धारा २२० की रचना से  $P$  और  $Q$  के मान भी मालूम किये जा सकते हैं जैसे  $R$  और  $S$  के मान अगले उदाहरण में मालूम किये गये हैं।

उदाहरण २। बेसन गर्डर का एक माग एक हल्के ढाँचे का बना हुआ है जिसमें तीन समत्रिबाहु त्रिभुज  $ABC$ ,  $CBD$  और  $CDE$  हैं।  $ACE$  क्षैतिज अवस्था में  $A$  और  $E$  पर रखा हुआ है। २ और १ टन के भार  $B$  और  $D$  पर लटके हुये हैं। गर्डर के मिल मिल भागों पर दबाव मालूम करो।



$a\beta$  और  $\beta\gamma$  क्रमसे २ इंच और १ इंच के बराबर २ टन और १ टन को प्रदर्शित करते हुये ऊर्ध्वाधर खींचो। कोई मूल-बिन्दु  $O$  लो और  $Oa$ ,  $O\beta$ , तथा  $O\gamma$  को मिला दो।

२ टन भार की क्रिया-रेखा पर कोई बिन्दु  $a$  लो।  $aO$  के समानान्तर  $ad$  खींचो जो प्रतिबल  $R$  को  $d$  पर मिले, और  $\beta O$  के समानान्तर  $ab$  खींचो जो  $D$  से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा को  $b$  पर मिले, और अब  $\gamma O$  के समानान्तर  $bc$  खींचो जो  $S$  को  $c$  पर मिले।  $cd$  को मिला दो। अब  $abcd$  संयोग-चतुर्भुज है जिसका (यदि हम  $O\delta$   $cd$  के समानान्तर  $O\delta$  खींचें) बल-चतुर्भुज  $a\beta\gamma\delta$  है (जो इस अवस्था में एक सरल रेखा है)। अतः  $R$  को  $\delta a$  और  $S$  को  $\gamma\delta$  प्रदर्शित करेंगी।



मान लो छड़ों द्वारा प्रयुक्त किये गये बल, चाहे वे दबाव हों या तनाव  $T_1, T_2, \dots$  हैं जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है ।

$CA$  के  $\delta e$  और  $AB$  के  $ae$  समानान्तर खींचो । अब जोड़  $A$  के लिये  $ae\delta$  बल-त्रिभुज होगा ; इसलिये  $ae$  और  $e\delta, T_2$  और  $T_1$  को प्रदर्शित करेंगे ।

$e\delta$  और  $\beta\delta$  क्रम से  $BC$  और  $BD$  के समानान्तर खींचो । अब जोड़  $B$  के लिये  $e\alpha\beta\delta$  बल-बहुभुज होगा, इसलिये  $e\delta$  और  $\delta\beta$  क्रम से  $T_4$  और  $T_3$  को प्रदर्शित करेंगे ।

$DC$  के समानान्तर  $\delta\theta$  खींचो । अब जोड़  $C$  के लिये  $\delta e\delta\theta$  बल-बहुभुज होगा ; इसलिये  $\delta\theta$  और  $\theta\delta, T_5$  और  $T_6$  को प्रदर्शित करेंगे ।

$DC$  के समानान्तर  $\gamma\delta$  खींचो जो  $e\delta$  को बढ़ाये जाने पर : पर मिले । अब जोड़  $D$  के लिये  $\delta\beta\gamma\delta$  बल-बहुभुज है, इसलिये  $\gamma\delta$  और  $\delta\gamma$  क्रम से  $T_8$  और  $T_7$  को प्रदर्शित करती हैं ; [ इससे यह परिणाम निकलता है कि  $\gamma\delta$   $\theta\delta$  के बराबर और समानान्तर होगी अतः  $\theta\delta, \gamma\delta$  के बराबर और समानान्तर होगी और इसलिये  $S$  को प्रदर्शित करेगी । ]

अन्त में जोड़  $E$  के लिये  $\theta\delta$  बल-त्रिभुज है ।

अतः यदि हम  $\alpha\delta, \delta\gamma, e\delta, e\alpha, \delta\beta, e\delta, \delta\theta, \theta\delta, \delta\gamma$  लम्बाइयों को इंचों में नापें, तो क्रमशः  $R, S, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$  के बल टन भारों में निकल आते हैं । यह क्रम से 1.75, 1.25, 1.01, 2.02, .87, .29, .72, .29, और 1.44 टन भार हैं ।

चित्र से यह स्पष्ट है कि  $AC, CE$ , और  $CD$  टाई हैं और शेप स्ट्रुट्स ।

### सदाहरणमाला ३८

[निम्नलिखित प्रश्न लेखा-चित्रीय रीति से करने चाहिये ।]

१ । एक सम त्रिभुजीय पटल  $ABC$ , जिसका भार 30 पौं० है,  $B$  पर लगे एक कब्जे के चारों ओर एक ऊर्ध्वाधर धरातल में घूम सकता है । वह  $BC$  के मध्य-बिन्दु पर लगी एक खूंटो पर इस प्रकार रखा हुआ समतुलित

अवस्था में है कि उसकी मुजा  $AB$  क्षैतिज रहती है। यदि भुजाओं  $AB$ ,  $BC$  और  $CA$  क्रम से 6, 5 और 4 फुट लम्बी हैं तो खूंटों पर दबाव और कम्बे पर विक्रिया मालूम करो।

२। एक 30 फुट लम्बी सम सीढ़ी का एक सिरा एक चिकनी दीवार पर और दूसरा सिरा रुझ भूमि पर रखा हुआ है। उसके पद की दीवार से दूरी 10 फुट है। भूमि द्वारा उसके पद पर लगाया गया बल मालूम करो यदि सीढ़ी का भार 150 पौं० है, (१) जब सीढ़ी पर कोई और भार नहीं है, (२) जब सीढ़ी पर उसकी लम्बाई के  $\frac{1}{3}$  पर 1 हण्डरवेट का भार रखा हुआ है।

३। यह प्रयोग द्वारा मालूम किया गया है कि किसी आनत धरातल पर जिसका क्षैतिज से झुकाव  $45^\circ$  है, रस्ते हुये 10 पौं० भार को धरातल पर ऊपर की ओर फिसलाने के लिये 10 पौं० भार की आवश्यकता होती है। भार और धरातल के बीच का घर्षण-गुणक मालूम करो।

४। एक चिकनी मेज पर रखे हुये एक चपटे मंडल के तीन दिये हुये बिन्दुओं पर क्रमशः 5.05 पौं०, 4.24 पौं० और 3.85 पौं० के बल लगाये गये हैं। ज्यामितीय रचना द्वारा बलों को इस प्रकार लगाओ कि मंडल समतुलित अवस्था में रहे और बलों के बीच के कोणों में अशों की संख्या मालूम करो।

५। एक सम आयताकार कुंदा, जिसके गुरुत्व-केन्द्र से रींषा गया सममित् परिच्छेद  $ABCD$  है, इस प्रकार रखा हुआ है कि  $GD$  एक रुझ क्षैतिज धरातल को स्पर्श करता है ( $\mu = \frac{1}{2}$ )। कुंदे का भार 40 पौं० है, और 10 पौं० भार का एक बल  $D$  पर  $CD$  की दिशा में कार्य करता है। यदि  $BC$  और  $CD$  की लम्बाई क्रमशः 3 और 5 फुट हैं, तो वह लघुतम भार मालूम करो, जिसे यदि  $CD$  के मध्य-बिन्दु पर बिन्दु  $DB$  के समानान्तर लगायें तो वह कुंदे को फिसला सके।

६। 100 पौ० भार का एक पिंड एक स्थिर धरातल पर रखा हुआ है जिसका भुजाय 3 मी० है। घर्षण-गुणक  $\frac{1}{3}$  है। यह बल मालूम करो जिसे यदि धरातल में  $40^\circ$  के कोण पर लगायें तो पिंड धरातल के ऊपर में फिसलने की सीमा पर हो। यह बल भी मालूम करो जिसे यदि धरातल में  $40^\circ$  के कोण पर लगायें तो पिंड धरातल में फिसलने की सीमा पर हो।

७।  $ABC$  एक त्रिभुज है जिसकी भुजायें  $AB, BC, CA$  क्रमसे 12, 10 और 15 इंच लम्बी हैं और  $B$  से  $CA$  पर  $BD$  लम्ब है। बल और संयोग-त्रिभुज के द्वारा निम्न बलों के परिणामी बल का परिमाण और उनकी क्रिया-रेखा मालूम करो,  $A$  से  $C$  तक 8,  $C$  से  $B$  तक 8,  $B$  से  $A$  तक 3 और  $B$  से  $D$  तक 2।

८।  $AB$  एक सरल रेखा 3 फुट लम्बी है।  $A$  और  $B$  पर क्रमसे 7 और 5 हण्डरवेट के (१) सम, (२) विपरीत समानान्तर बल लगाये गये हैं। प्रत्येक स्थिति में बिन्दु  $D$  के स्थान को रचना द्वारा मालूम करो जिस पर उनका परिणामीबल  $AB$  को मिलता है और  $A$  से उसकी दूरी भी मालूम करो।

९। 2, 4 और 3 हण्डरवेट के भार 10 फुट लम्बी एक छड़ पर उसके एक सिरे से 1, 3, और 7 फुट की दूरी पर रखे हुये हैं। उनके परिणामी बल की क्रिया-रेखा ठीक ठीक खींच कर दिखलाओ।

१०। 20 फुट लम्बी एक क्षैतिज छड़ सिरों पर लकी हुई है और उसके एक सिरे से 3, 7, 12 और 15 फुट की दूरी पर क्रमसे 3, 2, 5 और 4 हण्डरवेट के भार लटके हुये हैं। संयोग-त्रिभुज द्वारा सिरों पर दबाव मालूम करो।

११। जुड़ी हुई छड़ों का एक त्रिभुजीय ढाँचा  $ABC$ , जो  $A$  पर समकोणीय है,  $A$  के चारों ओर एक ऊर्ध्वाधर धरातल में घूम सकता है। भुजा  $AB$  क्षैतिज है और  $A$  के नीचे एक चिकनी ऊर्ध्वाधर स्यूटी के सहारे कोण  $C$  रखा हुआ है। यदि  $AB=3$  फुट,  $AC=1$  फुट, और  $B$  पर 50 पौ० का एक भार लटका हुआ है, तो लेखा-चित्रोप विधि द्वारा भिन्न भिन्न छड़ों पर दबाव मालूम करो।

१२। 1, 2, 4 और 4 पौ० भार के बल एक वर्ग की  $AB, BC, CD$  और  $DA$  भुजाओं पर कार्य करते हैं। सिद्ध करो कि उनका परिणामी बल 36 पौ० भार के बराबर है और  $CB$  से कोण स्पष्ट्या  $1\frac{1}{3}$  बनाता है तथा बढ़ाई हुई  $BC$  को  $G$  पर मिलता है, जहाँ पर  $CG = \frac{5}{8}BC$

१३।  $AC$  और  $CB$  दो बराबर छड़ें एक दूसरे से  $40^\circ$  का कोण बनाती हैं। उनके सिरे  $A$  और  $B$  भूमि पर रखे हुये हैं। जो इतनी रुक्ष है कि उन्हें फिसलने नहीं देती। घरातल  $ACB$  भूमि से  $70^\circ$  के कोण पर झुका हुआ है।  $C$  पर 10 हण्डरवेट भार का एक पिंड लगा हुआ है और पूरा समुदाय  $C$  से बँधी हुई एक रस्सी से रुका हुआ है, जो  $C$  और  $AB$  के मध्य-बिन्दु से आते हुये एक ऊर्ध्वाधर घरातल में है। यदि रस्सी भूमि से बाँध दी जाय और भूमि से  $50^\circ$  का कोण बनाये, तो रस्सी का तनाव और छड़ों पर क्रियायें मालूम करो। [इस तरतीब का निरा-टोंगें कहते हैं।]

१४। 140 पौ० भार की एक छड़  $AB$  का एक सिरा  $A$  एक रुख क्षैतिज घरातल पर रखा है और दूसरा सिरा  $B$  एक डोरी से सम्हाला जाता है जो एक चिकनी धिरनी पर से जाती है जिसकी  $A$  से क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दूरी क्रम से 15 और 20 फुट है। यदि छड़ की लम्बाई 15 फुट है, और यदि जब सिरा  $B$  क्षैतिज घरातल से 9 फुट की ऊँचाई पर है तो वह फिसलने की सीमा पर हो, तो घर्षण-गुणक, डोरी के तनाव और  $A$  पर परिणामी प्रतिबल मालूम करो।

१५। सिरों पर जुड़ी हुई तीन छड़ों से बना हुआ एक त्रिभुजीय ढोचा  $ABC$  समतुलित अवस्था में हो जाता है जब उस पर तीन बल  $P, Q$  और  $R$  उसके शीर्षों पर बाहर की ओर लगाये जाते हैं और जब प्रत्येक बल को त्रिभुजा-रेखा यह रेखा है जो उसके प्रयोग-बिन्दु को सम्मुख की छड़ के मध्य-बिन्दु से मिलती है। यदि  $BC, CA$  और  $AB$  भुजाओं की लम्बाई क्रमसे 11 फुट, 11 फुट और 7 फुट हैं, और यदि बल  $P, 50$  पौ० भार के बराबर है, तो  $Q$  और  $R$  और उन बलों के मान मालूम करो जो ढोचे की छड़ों पर कार्य करते हैं।

१६।  $A$  और  $B$  दो नियत खूंटियाँ हैं।  $A$  से  $B$  ऊँची है। एक भारी छड़  $B$  के ऊपर रखी हुई  $A$  के नीचे से जाती है। यदि छड़ और खूंटियों के बीच के घर्षण-कोण वही हों, तो सिद्ध करो कि छड़ भी ऐसी अवस्था में समतुलित रह सकती है जिसमें उसका आगे हो और  $AB$  का क्षैतिज से झुकाव घर्षण-कोण किसी और अधिक झुकाव के लिये  $B$  के आगे गुरु दूरी लेखा-चित्र द्वारा निकालो जो समतुलन के

१७। एक सम दंड  $AB$ , जिसका भार 10  $BD$  दो डोरियों से रुका हुआ है। और कोण  $105^\circ$  है।  $B$  पर कार्य करता हुआ इस अवस्था में रखे हुये है। सिद्ध करो कि  $P$  भार के बराबर है।

पर दबाव प्रत्या प्रत्या माप्युक्त करो यदि विरों की छद्मे धीवि में  $50^\circ$  के कोण बनाती है ।

२१। विष २ में स्वरचनापुर्वक जुड़ी हुई छद्मों को एक समानता अनुसार है जो  $A$  और  $B$  पर ऊर्ध्वपर प्रति-क्रियाओं में रखा हुआ है, यदि  $D$  पर 10 इन्च-वेट का एक भार रखा जाय, तो छद्मों पर दबाव प्रत्या प्रत्या माप्युक्त करो, यदि  $\angle DAB = 35^\circ$  और  $\angle CAB = 35^\circ$



Fig. 1.



Fig. 2.

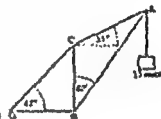


Fig. 3.

२२। एक रेल इन प्रकार बनी हुई है जैसा कि विष ३ में दिखलाया गया है, और 15 इन्च-वेट का एक भार  $A$  पर लटकाया गया है । भाग  $AC$  और  $AB$  पर कार्य करने वाले बल माप्युक्त करो ।

यदि रज्जवा  $BC$  स्वतन्त्रापूर्वक घूम सकता हो और  $BD$  दृढ़तापूर्वक नियत हो तो टाई  $CD$  में तनाव माप्युक्त करो ।

२३। वेग्न गट्टर के एक भाग में तीन समविबाहु त्रिभुज  $ABC$ ,  $ADC$  और  $BCE$  हैं । रेखाएँ  $AB$  और  $DCE$  धीवि हैं ।  $DCE$ ,  $AB$  में ऊपर है । यह  $A$  और  $B$  पर ऊर्ध्वपर आलम्बनों पर रखा हुआ है ।  $D$  और  $E$  पर क्रम में 5 और 3 टन के भार लदे हुये हैं । आलम्बनों पर प्रतिक्रियाएँ और भारों को के हुये भागों पर दबाव माप्युक्त करो ।

२४।  $ABCD$  पार कीली जुड़ी हुई छद्मों को एक गतुभुंज है, जो एक छद्म  $BD$  में रखा हुआ है ।  $A$  और  $C$  पर 40 पौं० भार के बल कार्य करते हैं । यदि  $AB=2$  फुट,  $BC=3$  फुट,  $CD=4$  फुट,  $DA=4\frac{1}{2}$  फुट और  $DB=5$  फुट, तो छद्मों का दबाव प्रत्या प्रत्या माप्युक्त करो ।

## अध्याय १६

### कुछ अधिक साध्य

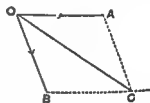
#### (Some Additional Propositions)

२२४—बल-समानान्तर-चतुर्भुज का लौकिक प्रमाण । यह प्रमाण दो भागों में विभाजित किया जाता है, (१) दिशा-सम्बन्धी (२) परिणामीबल के परिमाण-सम्बन्धी ।

#### (१) दिशा

(क) बराबर बल । मान लो बल बराबर हैं और  $OA$  और  $OB$  से प्रदर्शित होते हैं ।

समानान्तर चतुर्भुज  $OACB$  को पूरा करो, और  $OC$  को मिला दो । अब  $OC$  कोण  $AOB$  को समविभाजित करेगा ।



क्योंकि बल बराबर हैं, अतः यह स्पष्ट है कि परिणामीबल उनके बीच के कोण को

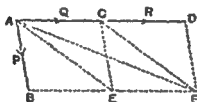
समविभाजित करेगा, क्योंकि कोई ऐसा कारण नहीं है कि परिणामीबल  $OC$  के एक ओर जितना हो उतना ही दूसरी ओर न हो । अतः जहाँ तक दिशा का सम्बन्ध है, हम मान सकते हैं कि बराबर बलों के लिये साध्य सही है ।

(ख) संमेल्य बल । यदि साध्य जहाँ तक दिशा का सम्बन्ध है  $P$  और  $Q$  बलों के जोड़ों के लिये सही है और  $P$  और  $R$  के जोड़ों के लिये भी सही है जहाँ  $P$  और  $R$  के बीच में वही कोण है जो  $P$  और  $Q$  के बीच में है, तो सिद्ध करना है कि यह साध्य  $P$  और  $(Q+R)$  के जोड़ों के लिये भी सही होगा ।

मान लो बल किसी दृढ़ पिंड के एक बिन्दु  $A$  पर कार्य करते हैं, और मान लो  $P$  की दिशा  $AB$  है और  $Q$  और  $R$  की दिशा  $ACD$  है ।

मान लो बल  $P$  और  $Q$  के परिमाण  $AB$  और  $AC$  से प्रदर्शित किये गये हैं।

क्योंकि बल के प्रेरण के नियम से, बल  $R$  अपनी क्रिया-रेखा में किसी भी बिन्दु पर कार्य करता हुआ माना जा सकता है। मान लो वह  $C$  पर कार्य करता है और  $CD$  से प्रदर्शित होता है।



समानान्तर-चतुर्भुजों  $ABEC$  और  $ABFD$  को पूरा करो।

$P$  और  $Q$  का परिणामीबल कल्पना से,  $AE$  दिशा में कार्य करते हुये किसी बल  $T$  के बराबर है। उनके स्थान पर इस परिणामीबल को रख लो और मान लो कि उनका प्रयोग-बिन्दु  $E$  पर हटा दिया गया है।

अब  $E$  पर कार्य करते हुये इस बल  $T$  के स्थान पर  $P$  और  $Q$  बलों को क्रम से  $CE$  और  $EF$  दिशा में कार्य करते हुये मान सकते हैं।

मान लो उनके प्रयोग-बिन्दु  $C$  और  $F$  पर हटा दिये गये।

अब कल्पना से  $C$  पर कार्य करते हुये  $P$  और  $R$  का परिणामीबल,  $CF$  दिशा में कार्य करते हुये किसी बल के बराबर है। इनके स्थान पर इनका परिणामीबल रख लो और उसके प्रयोग-बिन्दु को  $F$  पर हटा दो। अब क्योंकि सब बल  $F$  पर कार्य करते हैं और उनके संयुक्त प्रभाव में कोई परिवर्तन नहीं होता, अतः  $F$  उनके परिणामीबल की क्रिया-रेखा पर कोई बिन्दु होना चाहिये, इसलिये इष्ट परिणामीबल की दिशा  $AF$  है।

अतः साध्य सिद्ध हो गया।

इस साध्य का प्रयोग। हम (क) में देख चुके हैं कि साध्य उन सब बलों के लिये सही है जिनमें से प्रत्येक  $S$  के बराबर है।



अतः  $P$ ,  $Q$ , और  $R$  में से प्रत्येक को  $S$  के बराबर रख कर हम देखते हैं कि साध्य  $S$  और  $2S$  के लिये भी सही है और क्योंकि माध्य बल  $(S, S)$  और  $(S, 2S)$  के लिये सही है, इसलिये बल  $(S, 3S)$  के लिये भी सही होगा। इसी प्रकार से बल  $(S, 4S)$  के लिये भी सही होगा, इत्यादि।

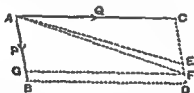
इस प्रकार हम देखते हैं कि साध्य बल  $S$  और  $mS$  के लिये भी सही है, जहाँ  $m$  कोई घन पूर्णांक है।

अब  $P$  को  $mS$  के बराबर और  $Q$  और  $R$  दोनों को  $S$  के बराबर रख कर हम देखते हैं कि साध्य  $mS$  और  $2S$  के लिये भी सही है।

पुनः  $P$  को  $mS$  के बराबर,  $Q$  को  $2S$  के बराबर और  $R$  को  $S$  के बराबर रख कर हम देखते हैं कि साध्य  $mS$  और  $3S$  के लिये भी सही है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि साध्य  $mS$  और  $nS$  के लिये भी सही है, जहाँ  $m$  और  $n$  घन पूर्णांक हैं; और कोई भी दो संमेय बल सदा  $mS$  और  $nS$  से प्रदर्शित किये जा सकते हैं।

(ग) असंमेय बल। मान लो  $P$  और  $Q$  असंमेय बल हैं और मान लो  $AB$  और  $AC$  इनको प्रदर्शित करते हैं।



समानान्तर चतुर्भुज  $ABDC$  को पूरा करो।

यदि  $P$  और  $Q$  का परिणामीबल  $AD$  रेखा पर न हो तो मान लो वह  $AE$  रेखा पर कार्य करता है जो  $CD$  को  $E$  पर मिलती है।

$AC$  को किन्हीं  $x$  बराबर भागों में विभाजित करो, जिसमें से प्रत्येक  $ED$  से छोटा है, और  $CD$  में से उत्तरोत्तरतः  $x$  के बराबर भाग काटते जाओ। उप-विभाग का अन्तिम बिन्दु  $F$ ,  $E$  और  $D$  के बीच में पड़ेगा क्योंकि  $x$ ,  $ED$  से छोटा है।

$CA$  के समानान्तर  $FG$  खींचो जो  $AB$  को  $G$  पर मिले और  $AF$  को मिला दो।

रेखायें  $AC$  और  $AG$  समेय बलों को प्रदर्शित करती हैं ; और इसलिये (ख) से उनका परिणामीबल  $AF$  पर होगा।

अतः  $AC$  और  $AB$  का परिणामीबल कोण  $BAF$  के भीतर होगा। परन्तु परिणामीबल  $AE$  दिशा में कार्य करता है जो कोण  $BAF$  के बाहर है। परन्तु यह असम्भव है।

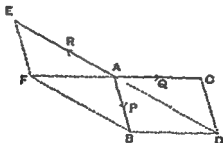
अतः  $AE$  परिणामीबल की दिशा नहीं हो सकती।

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि  $AD$  के अतिरिक्त कोई और दूसरी रेखा परिणामीबल की दिशा नहीं हो सकती।

अतः  $AD$  ही परिणामीबल की दिशा है।

## (२) परिमाण

पहले की ही भाँति मान लो  $AB$  और  $AC$  बल  $P$  और  $Q$  को प्रदर्शित करती हैं। समानान्तर चतुर्भुज  $ABDC$  को पूरा करो।



कोई बल  $R$  लो जो परिमाण और दिशा दोनों में ही  $AE$  से प्रदर्शित होता है और जो  $P$  और  $Q$  से समतुलित है।

प्रमाण के पहले भाग से  $AE$  उसी सरल रेखा में है जिसमें  $AD$  है।  $AE$ ,  $AD$  के बराबर भी होगी।

समानान्तर-चतुर्भुज  $AEFB$  को पूरा करो।

क्योंकि तीन बल  $P, Q$  और  $R$  समतुलित हैं, इसलिये, उनमें से प्रत्येक अन्य दो के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा।

क्योंकि  $P$  और  $R$  का परिणामीबल  $AF$  दिशा में है ; अतः  $Q$  की दिशा,  $AC$  और  $AF$  एक ही सरल रेखा होगी।

इसलिये  $ADBF$  एक समानान्तर-चतुर्भुज है, और इसलिये  $DA, BF$  के बराबर हैं।

परन्तु क्योंकि  $AEFB$  एक समानान्तर-चतुर्भुज है, इसलिये  $BF, AF$  के बराबर हैं।

इसलिये  $AD, AE$  के बराबर हैं, और इसलिये  $AD$  परिमाण और दिशा दोनों में ही  $P$  और  $Q$  के परिणामीबल के बराबर हैं।

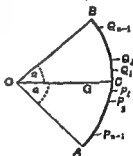
इस प्रमाण को डूबैला का प्रमाण कहते हैं।

२२५—समवृत्तीय चाप का गुरुत्व-केन्द्र।

मान लो  $AB$  एक वृत्तीय चाप है, जो अपने केन्द्र  $O$  पर  $2\alpha$  कोण बनाती है, और मान लो  $OC$  कोण  $AOB$  को समविभाजित करता है।

मान लो  $AB$  चाप  $2n$  बराबर भागों में विभाजित की गई है।  $C$  से आरम्भ करके ये उपविभाग के बिन्दु  $A$  की ओर  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  और  $B$  की ओर  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$  हैं।

इनमें से प्रत्येक विभाग-बिन्दु पर, सिरों  $A$  और  $B$  पर और  $C$  पर मान लो  $m$  भार के बराबर कण रखे गये हैं।



... मान लो दो उत्तरोत्तर कणों को मिलाने वाली चाप केन्द्र  $O$  पर  $\beta$  कोण बनाती है, इसलिये  $2n\beta = 2\alpha$

... क्योंकि कण-मध्य रेखा  $OC$  के सापेक्ष सममित है, इसलिये उनका गुरुत्व-केन्द्र,  $G, OC$  पर होगा। मान लो  $OG$  की दूरी  $x$  है। तो धारा १११ से,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{mr + 2mr \cos \beta + 2mr \cos 2\beta + \dots + 2mr \cos n\beta}{m + 2m + 2m + \dots + 2m} \\
 &= \frac{r}{2n+1} [1 + 2 \cos \beta + 2 \cos 2\beta + \dots + 2 \cos n\beta] \\
 &= \frac{r}{2n+1} \left[ 1 + 2 \frac{\cos \frac{n+1}{2} \beta \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right], \text{ [त्रिकोणमिति, धारा २४२]}
 \end{aligned}$$

त्रिकोणमितीय श्रेणी को जोड़ कर,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{r}{2n+1} \left[ 1 + \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta - \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right] = r \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta}{(2n+1) \sin \frac{\beta}{2}} \\
 &= r \frac{\sin \left( a + \frac{a}{2n} \right)}{(2n+1) \sin \frac{a}{2n}} \dots \dots \dots (1).
 \end{aligned}$$

अब मान लो कणों की संख्या अनन्तत. बढ़ा दी जाय। क्योंकि  $a$  स्थिर रहता है, इसलिये  $\beta$  अनन्तत. छोटा हो जायगा। इस प्रकार हमें एक सम वृत्तीय चाप की अवस्था मिल जाती है। अतः

$$\begin{aligned}
 (2n+1) \sin \frac{a}{2n} &= \frac{(2n+1)}{2n} a \cdot \frac{\sin \frac{a}{2n}}{\frac{a}{2n}} \\
 &= \left[ 1 + \frac{1}{2n} \right] a \cdot \frac{\sin \frac{a}{2n}}{\frac{a}{2n}} = a,
 \end{aligned}$$

जहाँ  $n$  अनन्तत: बढ़ा है।



२२६—द्वित्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र ।

पिछली धारा के संकेतों के अनुसार मान लो  $P$  और  $Q$  द्वित्रिज्य की वृत्तीय परिधि पर दो क्रमागत बिन्दु हैं, इसलिये  $PQ$  बहुत ही लगभग एक सरल रेखा होगी, और  $OPQ$  एक त्रिभुज होगी जिसका  $O$  बहुत ही छोटा शीर्ष कोण है।

$OP$  पर ऐसा  $P'$  लो कि  $OP' = \frac{1}{3}OP$ । चूँकि  $PQ$  बहुत छोटा है, अतः  $P'$  ही त्रिभुज  $OPQ$  का गुरुत्व-केन्द्र होगा।

$AB$  चाप पर अनन्त क्रमागत बिन्दुओं को  $O$  से मिलाने पर द्वित्रिज्य अनन्त संख्या के त्रिभुजों में विभाजित हो जायगा, जिनमें से प्रत्येक का गुरुत्व-केन्द्र बिन्दुदार वृत्त-चाप पर जिसकी त्रिज्या  $\frac{1}{3}r$  है, पड़ेगा।

अतः द्वित्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र वही है जो वृत्त चाप  $A'C'B'$  का है, इसलिये पिछली धारा से

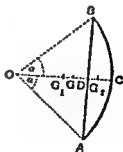
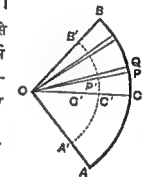
$$OG' = OC' \frac{\text{ज्या } \alpha}{\alpha} = \frac{1}{3}r \frac{\text{ज्या } \alpha}{\alpha}.$$

उपसाध्य । यदि द्वित्रिज्य अर्ध-वृत्त है, तो  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , और  $OG'$  की दूरी  $= \frac{4r}{3\pi}$ ।

२२७—वृत्तांश का गुरुत्व-केन्द्र ।

किसी वृत्त का वृत्तांश  $ACB$ , द्वित्रिज्य  $OACB$  और त्रिभुज  $OAB$  के अन्तर का होता है।

पिछली दो धाराओं के ही संकेतों के अनुसार मान लो  $G_1$  और  $G_2$  क्रम से त्रिभुज  $AOB$  और वृत्तांश  $ACB$  के गुरुत्व-केन्द्र हैं। मान लो  $G$  द्वित्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र है, और  $AB, OC$  को  $D$  पर मिलती हैं।



अतः एक समवृत्तीय चाप में, (१)

$$\bar{x} = r \frac{\text{ज्या } \alpha}{\alpha} *$$

हो जाता है ।

उपसार्थ्य । अर्द्ध-वृत्तीय चाप में  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , इसलिये केन्द्र से गुरुत्व-केन्द्र की दूरी

$$\bar{x} = r \frac{\text{ज्या } \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}$$

\* जो विद्यार्थी चलासिकलन से परिचित है वह इस परिणाम को इस प्रकार बड़ी आसानी से मालूम कर सकता है :

मान लो  $P$  चाप पर कोई ऐसा बिन्दु है कि  $\angle POC = \theta$ , और  $P'$  उसके बहुत ही निकट एक अन्य ऐसा बिन्दु है कि  $\angle P'OP = \delta\theta$ .

यदि पूरे चाप का द्रव्यमान  $M$  है तो  $PP'$  भाग का द्रव्यमान  $\frac{\delta\theta}{2\alpha} \cdot M$  और बिन्दु  $P$  का भुज  $r$  कोज्या  $\theta$  होगा । अतः धारा १११ से

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\delta\theta}{2\alpha} M \cdot r \text{ कोज्या } \theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\delta\theta}{2\alpha} \cdot M} = r \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \text{कोज्या } \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta} \\ &= r \frac{\left[ \text{ज्या } \theta \right]_{-\alpha}^{+\alpha}}{\left[ \theta \right]_{-\alpha}^{+\alpha}} = r \frac{\text{ज्या } \alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

सममित से यह भी स्पष्ट है कि गुरुत्व-केन्द्र  $OC$  पर होगा ।

### २२६—द्वित्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र ।

पिछली धारा के संकेतों के अनुसार मान लो  $P$  और  $Q$  द्वित्रिज्य की वृत्तीय परिधि पर दो क्रमागत बिन्दु हैं, इसलिये  $PQ$  बहुत ही लगभग एक सरल रेखा होगी, और  $OPQ$  एक त्रिभुज होगी जिसका  $O$  बहुत ही छोटा शीर्ष कोण है।

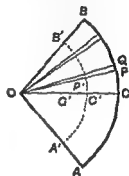
$OP$  पर ऐसा  $P'$  लो कि  $OP' = \frac{2}{3}OP$ । चूँकि  $PQ$  बहुत छोटा है, अतः  $P'$  ही त्रिभुज  $OPQ$  का गुरुत्व-केन्द्र होगा।

$AB$  चाप पर अनन्त क्रमागत बिन्दुओं को  $O$  से मिलाने पर द्वित्रिज्य अनन्त संख्या के त्रिभुजों में विभाजित हो जायगा, जिनमें से प्रत्येक का गुरुत्व-केन्द्र बिन्दीदार वृत्त-चाप पर जिसकी त्रिज्या  $\frac{2}{3}r$  है, पड़ेगा।

अतः द्वित्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र वही है जो वृत्त चाप  $A'C'B'$  का है, इसलिये पिछली धारा से

$$OG' = OC' \frac{\text{ज्या } a}{a} = \frac{2}{3}r \frac{\text{ज्या } a}{a}.$$

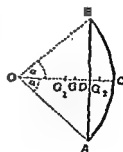
उपसाध्य । यदि द्वित्रिज्य अर्द्ध-वृत्त है, तो  $a = \frac{\pi}{2}$ , और  $OG'$  की दूरी  $= \frac{4r}{3\pi}$ ।



### २२७—वृत्तांश का गुरुत्व-केन्द्र ।

किसी वृत्त का वृत्तांश  $ACB$ , द्वित्रिज्य  $OACB$  और त्रिभुज  $OAB$  के अन्तर का होता है।

पिछली दो धाराओं के ही संकेतों के अनुसार मान लो  $G_1$  और  $G_2$  क्रम से त्रिभुज  $AOB$  और वृत्तांश  $ACB$  के गुरुत्व-केन्द्र हैं। मान लो  $G$  द्वित्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र है, और  $AB, OC$  को  $D$  पर मिलती हैं।





धारा १०९ में,  $OG = \frac{\Delta AOB \times OG_1 + \text{वृत्तांश } ACB \times OG_2}{\Delta AOB + \text{वृत्तांश } ACB} \dots (1).$

परन्तु  $OG_1 = \frac{1}{3}OD = \frac{1}{3}r$  कोज्या  $\alpha$ ,  $OG = \frac{1}{3}r \frac{\text{ज्या } \alpha}{\alpha}.$

और  $\Delta AOB = \frac{1}{2}r^2 \text{ज्या } 2\alpha,$

और वृत्तांश  $ACB = \text{द्वैत्रिज्य } AOB - \Delta AOB = \frac{1}{2}r^2 2\alpha - \frac{1}{2}r^2 \text{ज्या } 2\alpha.$

अतः समीकरण (१) में

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}r \frac{\text{ज्या } \alpha}{\alpha} &= \frac{\frac{1}{2}r^2 \text{ज्या } 2\alpha \times \frac{1}{3}r \text{कोज्या } \alpha + \frac{1}{2}r^2(2\alpha - \text{ज्या } 2\alpha) \times OG_2}{\frac{1}{2}r^2 \cdot 2\alpha} \\ &= \frac{\frac{1}{3}r \text{कोज्या } \alpha \text{ ज्या } 2\alpha + OG_2(2\alpha - \text{ज्या } 2\alpha)}{2\alpha}; \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{3}r \text{ज्या } \alpha - \frac{1}{3}r \text{कोज्या } \alpha \text{ ज्या } 2\alpha = OG_2(2\alpha - \text{ज्या } 2\alpha);$$

$$\therefore OG_2 = \frac{1}{3}r \frac{\text{ज्या } \alpha - \text{कोज्या } \alpha \text{ ज्या } 2\alpha}{2\alpha - \text{ज्या } 2\alpha} = \frac{1}{3}r \frac{\text{ज्या }^3 \alpha}{2\alpha - \text{ज्या } 2\alpha}.$$

२२८—गोले के कटिवन्ध का गुरुत्व-केन्द्र ।

सिद्ध करना कि गोले के किसी कटिवन्ध के पृष्ठ का गुरुत्व-केन्द्र उसके समतल सिरों के बीचोबीच रहता है ।

[कटिवन्ध गोले का वह भाग है जो दो समानान्तर धरातलों के बीच में पड़ता हो ।]

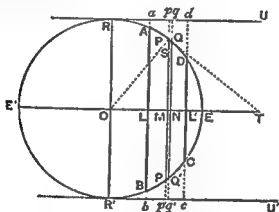
मान लो  $ABCD$  कटिवन्ध का वह परिच्छेद है जो गोले के केन्द्र से समतल सिरों पर लम्ब खींचे गये धरातल से बना है ।

कागज के धरातल में मान लो कि  $ROR'$  वह व्यास है जो समतल सिरों के समानान्तर है । इसके सिरों पर  $RU$  और  $R'U'$  स्पृश-रेखाएँ खींचो और मान लो  $AB$  और  $CD$  इन्हें  $a, b, c$  और  $d$  बिन्दुओं पर मिलती हैं ।

उस चित्र पर विचार करो जो ऊपर के चित्र को  $EOE'$  के चारों ओर घुमाने से बनता है । चाप  $AD$  कटिवन्ध और रेखा  $ad$  परिवेलन के भाग को बनायेगा ।

हम सिद्ध करेंगे कि धरातल  $ab$  और  $cd$  के बीच पड़ने वाले कटिवन्ध और वेलन के भागों के क्षेत्रफल बराबर हैं।

$A$  और  $D$  के बीच चाप पर कोई बिन्दु  $P$  लो और  $P$  के अत्यन्त निकट कोई दूसरा बिन्दु  $Q$  लो।  $pPMP'p'$  और  $qQ\wedge Q'q'$  रेखायें  $OE$  पर लम्ब लो जैसा चित्र में दिखाया गया है।



मान लो  $PQ, E'E$  को  $T$  पर मिलती है और  $PM$  पर  $QS$  लम्ब लोचों।

चूँकि  $Q$  चाप पर  $P$  का निकटतम बिन्दु है, अतः स्पर्श-रेखा की परिभाषा के अनुसार  $P$  पर रेखा  $PQ$  स्पर्श-रेखा होगी और इसलिये  $OPT$  एक समकोण होगा। जब  $R$  और  $Q$  एक दूसरे के बहुत ही निकट हैं तो गोला में  $PQ$  से खींचा गया क्षेत्रफल, जो वास्तव में  $2\pi MP.PQ$  और  $2\pi \wedge Q PQ$  के बीच में है, इनमें से किसी एक के बराबर होगा। इसलिये

$$\frac{\text{कटिवन्ध का छोटा भाग}}{\text{वेलन का छोटा भाग}} = \frac{PQ \text{ से खींचा गया क्षेत्रफल}}{pq \text{ से खींचा गया क्षेत्रफल}} = \frac{2\pi.MP.PQ}{2\pi.Mp.pq}$$

$$= \frac{MP}{Mp} \cdot \frac{PQ}{SQ} = \frac{MP}{Mp} \cdot \frac{1}{\cos \angle SQP} = \frac{MP}{Mp} \cdot \frac{1}{\cos \angle OTP}$$

$$= \frac{MP}{Mp} \cdot \frac{1}{\sin \angle MOP} = \frac{MP}{Mp} \cdot \frac{OP}{MP} = \frac{OP}{Mp} = 1.$$

इसलिये इन दो अत्यन्त निकट भागों से कटे हुये कटिवन्ध और वेलन के भाग वही हैं और इसलिये उनके गुरुत्व-केन्द्र भी वही हैं ।

अब यदि हम  $AB$  से आरम्भ करके  $CD$  तक अनन्त संख्या में कटिवन्ध और वेलन के पतले पतले परिच्छेद लें तो संगत परिच्छेदों के वही द्रव्यमान और वही गुरुत्व-केन्द्र होंगे ।

इसलिये कटिवन्ध और वेलन के गुरुत्व-केन्द्र वही हैं और वेलन का गुरुत्व-केन्द्र स्पष्टतः  $LL'$  का मध्य-बिन्दु है ।

अतः गोले के किसी कटिवन्ध का गुरुत्व-केन्द्र उसके समतल सिरों के बीचोबीच होता है ।\*

२२९—छोखले शून्य अर्द्धगोले का गुरुत्व-केन्द्र ।

मान लो  $AB$  गोले के केन्द्र से जाती है और इसलिये  $RR'$  पर पड़ती है और मान लो  $D$  और  $C$  हटकर  $E$  पर पहुँच जाते हैं अतः सीमान्त-पृष्ठ  $DC$ ,  $E$  पर एक बिन्दु मात्र रह जाता है ।

\*चलराशिकलन द्वारा । मान लो  $\angle AOE = \alpha$ ,  $\angle DOE = \beta$ ,  $\angle POE = \theta$ .  $P$  पर छोटे भाग का क्षेत्रफल  $= a^2 \delta \theta \times 2\pi a$  जया  $\theta$ , और  $P$  का भुज  $= a$  कोज्या  $\theta$ . अतः धारा १११ में,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\int_{\beta}^{\alpha} 2\pi a^2 \text{जया } \theta \delta \theta \cdot a \text{ कोज्या } \theta}{\int_{\beta}^{\alpha} 2\pi a^2 \text{जया } \theta \delta \theta} = a \frac{\int_{\beta}^{\alpha} \text{जया } \theta \text{ कोज्या } \theta d\theta}{\int_{\beta}^{\alpha} \text{जया } \theta d\theta} \\ &= a \frac{\left[ \frac{1}{2} \text{जया}^2 \theta \right]_{\beta}^{\alpha}}{\left[ -\text{कोज्या } \theta \right]_{\beta}^{\alpha}} = \frac{a \text{जया}^2 \alpha - \text{जया}^2 \beta}{2 \text{कोज्या } \beta - \text{कोज्या } \alpha} \\ &= \frac{a \text{कोज्या}^2 \beta - \text{कोज्या}^2 \alpha}{2 \text{कोज्या } \beta - \text{कोज्या } \alpha} = \frac{a}{2} (\text{कोज्या } \beta + \text{कोज्या } \alpha) \\ &= \frac{1}{2} [OL + OL']. \end{aligned}$$

इस प्रकार कटिबन्ध अर्द्ध गोला  $RDECR'$  हो जाता है और इसलिये उसका गुरुत्व-केन्द्र  $OE$  के मध्य-बिन्दु पर पड़ता है अर्थात् यह अर्द्ध-गोले के समतल आधार पर खींची गई गोले की त्रिज्या को समविभाजित करता है।

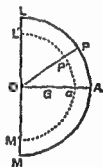
२३०—ठोस अर्द्ध गोले का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करना।

मान लो फागज के धरातल द्वारा बना हुआ  $LAM$  अर्द्धगोले का परिच्छेद है और मान लो  $OL$  अर्द्धगोले की वह त्रिज्या है जो उसके समतल आधार पर लम्ब है।

अर्द्धगोले पर कोई बिन्दु  $P$  लो और  $P$  पर पृष्ठ का अत्यन्त छोटा भाग लो। उस पतले सूची-स्तम्भ का गुरुत्व-केन्द्र जिसका आधार यह छोटा सा भाग है और शीर्ष  $O$  है,  $OP$  पर ऐसा  $P'$  बिन्दु होगा कि  $OP' = \frac{1}{2} OP$  (धारा १०७)। इसलिये इस पतले सूची-स्तम्भ का भार  $P$  पर लगा हुआ समझा जा सकता है।

मान लो अर्द्धगोले का बाह्य-पृष्ठ बहुत से छोटे छोटे भागों में विभाजित किया गया है और सगत सूची-स्तम्भ खींचे गये हैं। इन सबके गुरुत्व-केन्द्र अर्द्धगोले  $L'P'aM'$  पर, जिसका केन्द्र  $O$  और त्रिज्या  $Oa (= \frac{1}{2} OA)$  है, पड़ेगे।

अतः ठोस अर्द्धगोले का गुरुत्व-केन्द्र वही होगा जो अर्द्धगोलीय कवच  $L'P'aM'$  का है, अर्थात् वह  $G$  पर होगा जहाँ पर  $OG = \frac{1}{2} Oa = \frac{1}{4} OA$ .\*



\*चलराशिकलन द्वारा। मान लो  $AL$  चाप पर  $P$  कोई बिन्दु है।  $OA$  पर  $PN$  लम्ब खींचो और मान लो  $ON = x$ ,  $NP = y$ ; तो स्पष्टतः  $x^2 + y^2 = a^2$ , जहाँ  $a$  अर्द्धगोले की त्रिज्या है।

$PN$  और  $x + \delta x$  की दूरी पर खींचे गये धरातल के बीच के आयतन का छोटा भाग  $\pi y^2 \delta x$  है, और  $P$  का भुज  $x$  है।

२३१—इसी प्रकार हम गोले के द्विचिज्य का गुरुत्व-केन्द्र भी मालूम कर सकते हैं जो वृत्त के द्विचिज्य को घुमाने से बनता है, जैसा धारा २२८ के चित्र में चित्र  $OAQEBO$  भाग  $OAQE$  को चिज्या  $OE$  के चारों ओर घुमाने से बना है।

$O$  से इसके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी  $\frac{3}{8}(OL+OE)$  होगी।

२३२—ऊपर के प्रमाणों में कुछ बातें ऐसी हैं जो पूर्णतया संतोषजनक नहीं हैं। इनकी ठीक ठीक प्रमाणसिद्धि के लिये कलन की आवश्यकता पड़ती है।

२३३—काल्पनिक कर्म। यदि किसी पिंड पर कार्य करता हुआ एक बल-समुदाय सतततुलित हो और यदि हम यह कल्पना करें कि पिंड में थोड़ा सा स्थानान्तर हो जाता है जो समुदाय के ज्यामितीय नियमों के अनुकूल है, और पिंड का कोई बिन्दु  $Q$ , इस काल्पनिक स्थानान्तर के अनुसार  $Q'$  पर हट जाता है, तो  $QQ'$  को  $Q$  का काल्पनिक वेग अथवा स्थानान्तर कहते हैं।

शब्द 'काल्पनिक' से तात्पर्य यह है कि स्थानान्तर वास्तविक न हो कर अनुमानित है।

२३४—यदि पिंड के किसी बिन्दु  $Q$  पर कोई बल  $R$  कार्य करता है और  $Q$  का काल्पनिक स्थानान्तर  $QQ'$  है और यदि  $Q'N$ ,  $Q$  में  $R$  की क्रिया-रेखा पर लम्ब है, तो गुणनफल  $R.Q'N$  को बल  $R$  का काल्पनिक

अतः धारा १११ से,

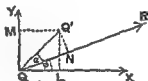
$$x = \frac{\int_0^a \pi y^2 \delta r x}{\int_0^a \pi y^2 \delta r} = \frac{\int_0^a x(a^2 - x^2) \delta x}{\int_0^a (a^2 - x^2) \delta x} = \frac{\left[ \frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a}{\left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a}$$

$$= \frac{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^3 - \frac{a^3}{3}} = \frac{3}{8} a$$

कर्म अथवा काल्पनिक घूर्ण कहते हैं। धारा १२७ की भाँति  $QN$ , के  $R$  की दिशा अथवा उसकी विपरीत दिशा में होने के अनुसार यह कर्म धन अथवा ऋण होता है।

२३५—किसी बल का काल्पनिक कर्म उसके अवयव बलों के काल्पनिक कर्मों का योग होता है।

मान लो  $R$  के दो लम्ब दिशाओं में अवयव बल  $X$  और  $Y$  हैं, और  $R$ ,  $X$  की दिशा से कोण  $\phi$  बनाता है, तो



$$X = R \cos \phi, \text{ और } Y = R \sin \phi.$$

मान लो  $R$  का प्रयोग-बिन्दु  $Q$  काल्पनिक स्थानान्तर के कारण हटकर  $Q'$  हो जाता है।  $R$  पर  $Q'N$  लम्ब लीजो मान लो  $\angle NQQ' = \alpha$ .

$X$  और  $Y$  के काल्पनिक कर्मों का योग

$$= X \cdot QL + Y \cdot QM$$

$$= R \cos \phi \cdot QQ' \cos (\phi + \alpha) + R \sin \phi \cdot QQ' \sin (\phi + \alpha)$$

$$= R \cdot QQ' [\cos \phi \cos (\phi + \alpha) + \sin \phi \sin (\phi + \alpha)]$$

$$= R \cdot QQ' \cos \alpha$$

$$= R \cdot QN$$

$$= R \text{ का काल्पनिक कर्म।}$$

२३६—काल्पनिक कर्म का मिद्धान्त बनलाता है कि यदि किसी पिंड पर कार्य करता हुआ कोई बल-समुदाय समतुलित हो, और पिंड में थोड़ा सा स्थानान्तर हो जाय जो समुदाय के ज्यामितीय नियमों के अनुकूल हो, तो काल्पनिक कर्मों का बीजीय योग शून्य होता है; और विलोमतः यदि यह बीजीय योग शून्य हो तो बल समतुलित होंगे; अर्थात् यदि प्रत्येक बल  $R$  में उसकी क्रिया-रेखा की दिशा में काल्पनिक स्थानान्तर  $r$  हो, तो  $\sum (R \cdot r) = 0$ ; और विलोमतः यदि  $\sum (R \cdot r) = 0$ , तो बल समतुलित होंगे।

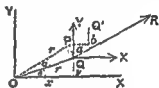
अगली धारा में समन्तरीय बलों के लिये हम इस नियम का प्रमाण देंगे।

२३७—किसी समतलीय बल-समुदाय के लिये काल्पनिक नियम का प्रमाण ।

बलों के घरातल में कोई दो लम्ब सरल रेखाएँ लो और मान लो कि पिंड में थोड़ा सा स्थानान्तर हो जाता है । यह पिंड को  $O$  के चारो ओर किसी छोटे से कोण  $\alpha$  रेडियन से घुमा कर और फिर अक्षों के समानान्तर  $a$  और  $b$  दूरी हटा कर किया जा सकता है ।

[ विद्यार्थी किसी पुस्तक को मेज पर एक स्थान से दूसरे स्थान तक हटा कर इस बात को देख सकता है, यदि पुस्तक एक स्थान से दूसरे स्थान पर जाने में बराबर मेज को स्पर्श करती रहे । ]

मान लो  $Q$  किसी बल  $R$  का प्रयोग-बिन्दु है जिसके  $O$  के मापेध निर्देशांक  $x$  और  $y$  हैं, और जिसके कोणीय निर्देशांक  $r$  और  $\theta$  हैं, इसलिये  $x=r$  कोज्या  $\theta$  और  $y=r$  ज्या  $\theta$ , जहाँ पर  $OQ=r$  और  $XOQ=\theta$ .



जब  $Q$  के स्थान में थोड़ा सा

स्थानान्तर हो गया हो तो  $Q$  के नये स्थान  $Q'$  के निर्देशांक

$$x \text{ कोज्या } (\theta + \alpha) + a \text{ और } r \text{ ज्या } (\theta + \alpha) + b,$$

अर्थात्  $r$  कोज्या  $\theta$  कोज्या  $\alpha - r$  ज्या  $\theta$  ज्या  $\alpha + a$

और  $r$  ज्या  $\theta$  कोज्या  $\alpha + r$  कोज्या  $\theta$  ज्या  $\alpha + b$ ,

अर्थात्,  $r$  कोज्या  $\theta - a$   $r$  ज्या  $\theta + a$  और  $r$  ज्या  $\theta + a$   $r$  कोज्या  $\theta + b$  हैं, क्योंकि  $\alpha$  बहुत छोटा है ।

इसलिये  $Q$  के निर्देशांको में अन्तर

$$a - a.r \text{ ज्या } \theta \text{ और } b + a.r \text{ कोज्या } \theta,$$

अर्थात्  $a - ay$  और  $b + ax$  हैं ।

यदि अब  $R$  के अवयव बल  $X$  और  $Y$  हैं, तो  $R$  का काल्पनिक बल, जो  $X$  और  $Y$  के काल्पनिक बलों के योग के बराबर है,

$$X(a - ay) + Y(b + ax),$$

अर्थात्  $aX + b.Y + a(Yx - Yy)$  हैं ।

इसी प्रकार हम समुदाय के किसी अन्य बल का काल्पनिक कर्म भी मालूम कर सकते हैं, जहाँ  $a, b$ , और  $\alpha$  प्रत्येक बल के लिये वही है।

इसलिये काल्पनिक बलों का योग शून्य होगा यदि

$$aE(X) + bE(Y) + \alpha E(Yx - Xy) \text{ शून्य हो।}$$

यदि बल समतुलित हैं तो  $E(X)$  और  $E(Y)$  क्रम से  $OX$  और  $OY$  अक्षों पर अवयव बलों के जोड़ हैं, और इसलिये, धारा ८३ से, वे पृथक् पृथक् शून्य हैं।

और  $Yx - Xy =$  मूलबिन्दु  $O$  पर  $X$  और  $Y$  के घूर्णों का योग  $= O$  पर  $R$  का घूर्ण। (धारा ६२)

अतः  $E(Yx - Xy) = 0$  पर सब बलों के घूर्णों का योग और धारा ८३ से, यह योग भी शून्य है।

अतः यदि बल समतुलित हैं तो उनके काल्पनिक कर्मों का योग शून्य होगा।

२३८—विलोमतः, यदि किसी स्थानान्तर के लिये काल्पनिक कर्मों का योग शून्य है तो बल समतुलित होंगे।

पिछली धारा के संकेत से, काल्पनिक कर्मों का योग

$$aE(X) + bE(Y) + \alpha E(Yx - Xy) \dots \dots (१)$$

है, और वह सब स्थानान्तरों के लिये शून्य है।

ऐसा स्थानान्तर लो जिसमें पिंड  $x$  के अक्ष के समानान्तर केवल  $a$  दूरी हटे। इस स्थानान्तर के लिये  $b$  और  $\alpha$  शून्य हो जाते हैं, और (१) से  $aE(X) = 0$ , इसलिये  $E(X) = 0$ , अर्थात्  $OX$  के समानान्तर अवयव बलों का योग शून्य है।

इसी प्रकार यदि  $y$  के अक्ष के समानान्तर स्थानान्तर लें तो  $OY$  के समानान्तर अवयव बलों का योग भी शून्य होगा।

अन्त में, मान लो कि स्थानान्तर केवल मूलबिन्दु  $O$  के चारों ओर घूमने के कारण है, तो  $a$  और  $b$  शून्य होंगे और (१) से  $E(Yx - Xy) = 0$ , इसलिये  $O$  पर बलों के घूर्णों का योग भी शून्य होगा।

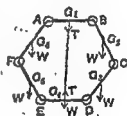


इसलिये धारा ८३ के समतुलन के तीनों नियम सन्तुष्ट हो जाते हैं और इसलिये बल-समुदाय समतुलित रहता है।

२३९—काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त के प्रयोग के उदाहरणस्वरूप हम निम्नलिखित प्रश्न करेंगे।

छः बराबर दंड  $AB, BC, CD, DE, EF$  और  $EA$ , जिनमें से प्रत्येक का भार  $W$  है, अपने सिरों पर इस प्रकार स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं कि उनसे एक षष्ठभुज बनता है। छड़  $AB$  क्षैतिज अवस्था में नियत है और  $AB$  और  $DE$  के मध्य-बिन्दु एक डोरी से बँधे हुये हैं। सिद्ध करा कि उसका तनाव  $3W$  है।

मान लो  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$  और  $G_6$  दंडों के मध्य-बिन्दु हैं। क्योंकि सममित्ति से  $BC$  और  $CD$  ऊर्ध्वाधर से बराबर कोण बनाती हैं, इसलिये बिन्दु  $C, G_3$  और  $D$  की  $AB$  से गहराई  $G_2$  की गहराई की क्रम से २, ३, और ४ गुनी है।



मान लो समुदाय में, ऊर्ध्वाधर धरातल में इस प्रकार स्थानान्तर हो है कि  $D$  और  $E$  यथा  $B$  और  $A$  से खोची गई ऊर्ध्वाधर रेखाओं के ठीक नीचे रहते हैं और  $DE$  सदा क्षैतिज रहती है।

यदि  $G_2$  ऊर्ध्वाधरत  $x$  दूरी नीचे उतर आता है, तो  $G_3$ ,  $3x$  दूरी नीचे,  $G_4$ ,  $4x$  दूरी नीचे, और  $G_5$  और  $G_6$  क्रम से  $3x$  और  $x$  दूरी नीचे उतर आयेंगे।

भारों के द्वारा किये हुये काल्पनिक कर्मों का योग।

$$= W \cdot x + W \cdot 3x + W \cdot 4x + W \cdot 3x + W \cdot x$$

$$= 12W \cdot x.$$

यदि डोरी का तनाव  $T$  है, तो तनाव का काल्पनिक कर्म  $T \times (-4x)$  है।

क्योंकि  $G_1$  का स्थानान्तर  $T$  की क्रिया-रेखा के विपरीत है इसलिये उसका काल्पनिक कर्म शून्य होगा।

अतः काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त से

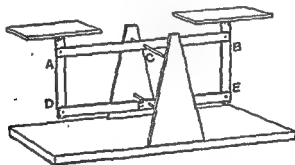
$$12W \cdot x + T(-4x) = 0,$$

अर्थात्

$$T = 3W.$$

२४०—रोवरवेल की तुला। इस तुला में जो चिट्ठियाँ तोलने वाली तुला के रूप की होती हैं, चार दंड  $AB$ ,  $BE$ ,  $ED$  और  $DA$  होते हैं, जो  $A, B, E$  और  $D$  कोनों पर समानान्तर-चतुर्भुज बनाते हुये स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े होते हैं और  $AB$  और  $ED$  के मध्य-बिन्दु  $C$  और  $E$  एक ऊर्ध्वाधर रेखा में नियत बिन्दु  $C$  और  $F$  पर होते हैं। दंड  $AB$  और  $DE$ ,  $C$  और  $F$  के चारों ओर बें रोकटोक घूम सकते हैं।

$AD$  और  $BE$  दंडों पर पलड़े लगे होते हैं। एक पलड़े में पदार्थ  $W$  रखा होता है जिसे तोलना होता है और दूसरे में प्रतितुलित करता हुआ भार  $P$  रखा जाता है।



हम काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त को यह सिद्ध करने के लिये प्रयोग करेंगे कि यह बात बिल्कुल अनावश्यक है कि चाहें भार  $P$  और  $W$  पलड़ों के किसी भी भाग में क्यों न रखे जायें।

क्योंकि  $CBEF$  और  $CADF$  समानान्तर-चतुर्भुज हैं, अतः तुला को किसी भी कोण से क्यों न घुमाया जाय, छड़े  $BE$  और  $AD$  हमेशा  $CF$  के समानान्तर होंगी और इसलिये हमेशा ऊर्ध्वाधर रहेगी।

यदि छड़  $AB$  को किसी छोटे कोण से घुमायें तो बिन्दु  $B$  उतना ही ऊँचा उठेगा जितना नीचा बिन्दु  $A$  आयेगा। इसलिये छड़  $BE$  उतनी ही ऊँची उठती है जितनी नीची  $AD$  उतरती है, और दायी पलड़ा उतना ही ऊँचा

उठता है जितना नीचा बायीं पलड़ा उतरता है। ऐसे स्थानान्तर में छड़  $BE$  और उसके पलड़े के भारों का काल्पनिक कर्म, छड़  $AD$  और उसके पलड़े के भारों के काल्पनिक कर्म के बराबर और विपरीत होता है। इसलिये काल्पनिक कर्म के समीकरण में यह काल्पनिक कर्म एक दूसरे को नष्ट कर देते हैं।

यदि बायें पलड़े का स्थानान्तर ऊपर की ओर  $p$  है तो बायें पलड़े का स्थानान्तर नीचे की ओर  $p$  होगा।

इसलिये काल्पनिक कर्म के समीकरण से

$$P.p + W(-p) = 0, \quad -$$

अर्थात्

$$P = W.$$

अतः यदि तुला किसी भी अवस्था में समतुलित हो, तो भार  $P$  और  $W$  बराबर होते हैं, और यह पलड़ों में भारों के स्थानों पर निर्भर नहीं रहता। इसलिये पलड़ों में भारों का कोई भी स्थान हो सकता है।

अतएव जब तक पलड़ों के भार बराबर हैं तब तक यह आवश्यक नहीं है कि उनका रूप एक सा ही हो, और न यह ही आवश्यक है कि वे तुला में एक ही प्रकार से लगाये जायें।

उदाहरणार्थ, ऊपर के चित्र में कोई भी एक पलड़ा  $CF$  में विपरीत दिशा के स्थान पर उसकी ओर इंगित कर सकता है पर दूसरे के स्थान में किसी परिवर्तन की आवश्यकता नहीं पड़ेगी।

### उदाहरणमाला ३६

१। भार बराबर भारी सम दंड एक समचतुर्भुज बनाते हुये स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं और वे एक शीर्ष-विन्दु से लटके हुये हैं। ऊपर के दो दंडों के मध्य-विन्दु एक हल्के दंड द्वारा इस प्रकार सम्बद्ध हैं कि समचतुर्भुज सिद्ध न जाय। सिद्ध करो कि इस हल्के दंड में तनाव  $4W$  स्पष्ट्या  $\alpha$  है, जहाँ  $W$  प्रत्येक दंड का भार है और  $2\alpha$  समचतुर्भुज का लटकते हुये विन्दु पर कोण है।

२। एक डोरी, जिसकी लम्बाई  $a$  है, उस सम चतुर्भुज का छोटा विकर्ण बनाती है जो कब्जों द्वारा जुड़े हुये चार समदंडों से बना हुआ है, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई  $b$  और भार  $W$  है। यदि दंडों में से कोई एक क्षैतिज अवस्था में रखा हुआ है तो सिद्ध करो कि डोरी का तनाव

$$\frac{2W(2b^2 - a^2)}{b\sqrt{4b^2 - a^2}} \text{ होगा।}$$

३। एक सम पद्भुज  $ABCDEF$  छ. बराबर दंडों से बना है जिनमें से प्रत्येक का भार  $W$  है और जो एक दूसरे से स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं। पद्भुज ऊर्ध्वाधर घरातल में है और  $AB$  एक क्षैतिज भेज को स्पर्श करती है। यदि  $C$  और  $F$  एक हल्की डोरी से सम्बद्ध हों, तो सिद्ध करो कि उसका तनाव  $W\sqrt{3}$  होगा।

४। एक तिपाई में तीन बराबर सम दंड लगे हैं, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई  $a$  और भार  $w$  है और जो एक सिरे पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं। इनके मध्य-बिन्दु डोरियो से जिनकी लम्बाई  $b$  है मिलाये गये हैं। तिपाई इस प्रकार रखी हुई है कि उसके पाये एक चिकने क्षैतिज घरातल पर है और एक भार  $W$  उसके उभयनिष्ठ जोड़ पर लटका हुआ है। सिद्ध करो कि प्रत्येक डोरी का तनाव

$$\frac{3}{2}(2W+3w)\frac{b}{\sqrt{9a^2-12b^2}} \text{ है।}$$

५। चार जुड़े हुये सम भारी दंडों से, जिनमें से प्रत्येक का भार  $W$  है, बना हुआ एक वर्गाकार ढाँचा एक कोने से लटका हुआ है। उसके नीचे के तीनों कोनों से बराबर भार  $W$  लटके हुये हैं, और वर्ग का रूप उसके क्षैतिज विकर्ण पर एक हल्का दंड लगा कर रक्षित किया जाता है। सिद्ध करो कि दंड का तनाव  $4W$  है।

६। चार बराबर दंड, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई  $a$  है एक समचतुर्भुज  $ABCD$  बनाते हुये एक दूसरे से जुड़े हुये हैं और कोण  $B$  और  $D$  एक डोरी से जिनकी लम्बाई  $l$  है मिलाये गये हैं। समुदाय

इस प्रकार एक ऊर्ध्वाधर धरातल में रखा हुआ है कि  $A$  एक क्षैतिज मेज पर है और  $AC$  ऊर्ध्वाधर है। सिद्ध करो कि डोरी का तनाव

$$2W' \frac{l}{\sqrt{4a^2 - l^2}}$$

है, जहाँ प्रत्येक दंड का भार  $W'$  है।

७। एक भारी स्थिति-स्थापक तार, जिसकी प्राकृतिक लम्बाई  $2\pi a$  है, एक चिकने शंकु के चारों ओर रखा हुआ है। शंकु का अक्ष ऊर्ध्वाधर है और उसका अर्द्ध-शीर्ष कोण  $\alpha$  है। यदि  $W'$  तार का भार और  $\lambda$  उसका स्थिति-स्थापन-मापक, है तो सिद्ध करो कि वह समतुलित अवस्था में होगा जब वह एक वृत्त के आकार में है जिसकी त्रिज्या

$$a \left( 1 + \frac{W'}{2\pi\lambda} \text{ कोस } \alpha \right) \text{ है।}$$

८।  $AB$  और  $AC$  दो बराबर सम दंड, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई  $2b$  है,  $A$  पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं और वे एक चिकने वृत्त पर जिसकी त्रिज्या  $a$  है रखे हुये हैं। काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त से सिद्ध करो कि, यदि उनके बीच का कोण  $2\theta$  है, तो  $b \text{ ज्या } \theta = a \text{ कोस } \theta$ ।

९। पृष्ठ ३३८ के उदाहरण १३ को काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त से हल करो।

## सरल विविध उदाहरणमाला

१। 13 पौ० और 14 पौ० भार के उन दो बलों का परिणामीबल मालूम करो जिनके बीच के अधिक-कोण की ज्या  $\frac{1}{2}\pi$  है।

२। 100 पौ० भार के बल को दो बराबर बलों में, जिनके बीच का कोण  $60^\circ$  है, विद्विष्ट करो।

३।  $ABCD$  एक वर्ग है। 1 पौ०, 6 पौ० और 9 पौ० भार के बल क्रमशः  $AB$ ,  $AC$ , और  $AD$  दिशाओं में कार्य करते हैं। उनके परिणामीबल का परिमाण दशमलव के दो अंकों तक शुद्ध मालूम करो।

४। दो बलों का, जो एक दूसरे से  $120^\circ$  के कोण पर कार्य करते हैं, परिणामीबल छोटे अवयव बल पर लम्ब है। बड़ा अवयव बल 100 पौ० भार के बराबर है। दूसरा अवयव बल और परिणामीबल मालूम करो।

५। चतुर्भुज  $ABCD$  के विकर्ण  $AC$  और  $BD$  के मध्य-बिन्दु  $E$  और  $F$  हैं। यदि  $EF$  का मध्य-बिन्दु  $G$  है, तो सिद्ध करो कि चार बल जो  $AG$ ,  $BG$ ,  $CG$  और  $DG$  से परिमाण और दिशाओं में प्रदर्शित होते हैं, समतुलित हैं।

६। 12 फुट लम्बा एक सख्त डंडा एक ऊर्ध्वाधर दीवार से क्षैतिज दिशा में निकला हुआ है। यदि 28 पौ० का एक भार उसके सिरे पर लटका दिया जाय तो वह टूट जायगा। बताओ टूटने पर कितनी दूर तक एक लड़का, जिसका भार 8 स्टोन है, लटक सकता है।

७। एक डंड जिसका भार 4 औ० है और जिसकी लम्बाई एक गज है मेज पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसकी एक तिहाई लम्बाई मेज के किनारे से बाहर निकली रहती है। वह बड़े से बड़ा भार मालूम करो जो एक डोरी द्वारा दंड के सिरे से लटकाया जाय कि दंड गिरने न पाये।

८। एक सम कड़ी, जिसका भार 30 पौ० है, का नीचे का सिरा भूमि पर रखा हुआ है, और ऊपर का सिरा एक क्षैतिज डोरी द्वारा, जो एक छोटी घिरनी पर से जाती है, एक भार से बंधा हुआ है। यदि ऊर्ध्वाधर से कड़ी का झुकाव  $60^\circ$  है, तो सिद्ध करो कि नीचे

के सिरे पर दबाव लगभग 40 पौ० भार है और डोरी से लगभग 26 पौ० भार बँधा हुआ है।

९। उन समानान्तर वलों का केन्द्र मालूम करो जो क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 और 6 पौ० भार के बराबर हैं, और जिनके प्रयोग-बिन्दु  $AB$  पर  $A$  से क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 और 11 इंच हैं।

१०। त्रिभुज  $ABC$  का कोण  $B$  समकोण है।  $AB$  की लम्बाई 8 इंच और  $BC$  की लम्बाई 11 इंच है।  $A$ ,  $B$  और  $C$  पर कण रखे हुये हैं जिनके भार क्रम से 4, 5 और 6 हैं।  $A$  से उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

११। एक समन्निवाहु त्रिभुज की भुजा  $AB$  पर  $C$  के विपरीत ओर एक आयत खींचा गया है जिसकी ऊँचाई  $AB$  की आधी है। सिद्ध करो कि कुल चित्र का गुरुत्व-केन्द्र  $AB$  का मध्य-बिन्दु है।

१२। एक सम षट्भुज में से एक समन्निवाहु त्रिभुज जिसका शीर्ष षट्भुज के केन्द्र पर है और जिसका आधार उसकी एक भुजा है, काट लिया गया है। शेष का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

१३। 6 पेनियों का एक ढेर एक क्षैतिज मेज पर इस प्रकार रखा हुआ है कि प्रत्येक पेनी अपने नीचे की पेनी से बराबर दूरी बाहर निकली हुई है। सबसे नीचे और सबसे ऊपर की पेनी के केन्द्रों के बीच की बड़ी से बड़ी क्षैतिज दूरी मालूम करो।

१४। जब दो भार एक सीधे लीवर के सिरों से समतुलित अवस्था में लटकाये जाते हैं तो आलम्ब पर दबाव 20 पौ० भार होता है। यदि लीवर की लम्बाई 12 इंच है और उसके सिरो से आलम्ब की दूरियों की अनुपाति 3:2 है, तो भार मालूम करो।

१५। एक सीधे लीवर के एक सिरे पर उसका आलम्ब है। लीवर की लम्बाई 5 फुट और भार 10 पौ० है। आलम्ब से 1 फुट और 3 फुट दूरी पर 3 और 6 पौ० के भार लटकाये गये हैं। उसके दूसरे सिरे पर कार्य करता हुआ एक बल उसे क्षैतिज अवस्था में रखता है। आलम्ब पर दबाव मालूम करो।

१६। पाँच पर घिरनियों की उस श्रेणी में जिसमें प्रत्येक घिरनी पृथक् पृथक् डोरी से लटकी हुई है, गामर्थ्य  $P$  और भार  $W$  के बीच का सम्बन्ध मालूम करो, जहाँ प्रत्येक घिरनी का भार  $P$  है।

१७। 5 हल्की घिरनियों की उस श्रेणी में जिसमें प्रत्येक डोरी एक बिना भार के दंड में जिसमें भार लटका हुआ है, बँधी हुई है, यदि डोरियाँ उत्तरोत्तर एक एक इंच की दूरी पर हों, तो बताओ दंड के किस बिन्दु से भार लटकाना चाहिये कि वह क्षैतिज अवस्था में रहे।

१८। 5 पी० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर जिसका क्षैतिज में झुकाव  $30^\circ$  है, रखा हुआ है, और उसपर 2 पी० भार का एक बल धरातल के समानान्तर ऊपर की ओर और  $P$  पी० भार का एक बल धरातल से  $30^\circ$  का कोण बनाता हुआ कार्य करता है।  $P$  का मान मालूम करो यदि पिंड समतुलित अवस्था में हो।

१९। यदि एक सही तुला का एक पलड़ा हटा दिया जाय और दूसरे पलड़े में कोई भार न रखा जाय, तो सिद्ध करो कि तुला के दंड का क्षैतिज से झुकाव स्पष्ट्या  $^{-1} \frac{Sa}{W'h + Sh}$  होगा, जहाँ पर  $2a$  दंड की लम्बाई है,  $h$  और  $k$  क्रमशः अबलम्बन-बिन्दु से दंड और तुला के गुरुत्व-केन्द्र की दूरियाँ हैं, और  $S$  और  $W'$  क्रमसे पलड़े और शेष तुला के भार हैं।

२०। यदि साधारण विषम-भुज तुला के दंड के गुरुत्व-केन्द्र की आलम्ब से, दूरी 2 इंच है, सरकनेवाला भार 4 औ० है, और दंड का भार 2 पी० है, तो गुरुत्व-केन्द्र से अंशांकित शून्य चिन्ह की दूरी मालूम करो। यदि आलम्ब और उस सिरे की बीच की दूरी जिसमें पलड़ा लटका हुआ है, 4 इंच है, तो उत्तरोत्तर अंशांकित बिन्दुओं की दूरी भी मालूम करो।

२१। यदि किसी पेच (स्कू) की परिधि 20 इंच और दो उत्तरोत्तर चूड़ियों के बीच की दूरी 75 इंच है, तो उसका यांत्रिक लाभ मालूम करो।

२२। एक रूख धरातल की ऊँचाई की आधार से 3:4 की निष्पत्ति है, और उसपर एक पिंड उसके आधे भार के बराबर एक क्षैतिज



चल में ठीक रुका हुआ है। पिंड और घरातल के बीच का घर्षण-गुणक मालूम करो।

२३। 30 फुट लम्बी सीढ़ी का एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वापर दीवार पर और दूसरा रुखा भूमि पर जिसका घर्षण-गुणक  $\frac{1}{2}$  है, रखा हुआ है। बताओ एक आदमी जिसका भार सीढ़ी के भार से चौगुना है, सीढ़ी पर कितना ऊँचा चढ़ सकता है कि सीढ़ी न फिसलने पाये, यदि सीढ़ी का पद दीवार में 6 फुट दूर हो।

२४। एक बेलनाकार सुरंग खडिया मिट्टी में होकर, जिसका घनत्व पानी के घनत्व से 23 गुना है, 100 फुट की गहराई तक खोदी जानी है। सुरंग का व्यास 10 फुट है। उस इंजन की अक्ष-सामर्थ्य क्या होगी जो सामान को आठ आठ घण्टों के 12 दिनों में उठा सकता है।

### \*\*\*कठिन विविध उदाहरणमाला

१। यदि  $O$  त्रिभुज  $ABC$  के परिवृत्त का केन्द्र है, और  $OA, OB$  और  $OC$  पर क्रमशः  $BC, CA$ , और  $AB$  के अनुपात में बल लगाये गये हों तो सिद्ध करो कि उनका परिणामीबल अन्तः-वृत्त के केन्द्र से जायेगा।

२। तीन बल क्रमानुसार त्रिभुज  $ABC$  की भुजाओं पर लगाये गये हैं, और उनका परिणामीबल त्रिभुज के लाम्बिक-केन्द्र और गुणत्व-केन्द्र में जाता है, तो सिद्ध करो कि बल

ज्या  $2A$  ज्या  $(B-C)$ : ज्या  $2B$  ज्या  $(C-A)$ : ज्या  $2C$  ज्या  $(A-B)$  के अनुपात में होंगे। यह भी सिद्ध करो कि उनका परिणामीबल परिवृत्त और अन्तः-वृत्त के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा पर कार्य करेगा यदि बल

कोज्या  $B$ —कोज्या  $C$ : कोज्या  $C$ —कोज्या  $A$ : कोज्या  $A$ —कोज्या  $B$  के अनुपात में हों।

३। तीन बल  $PA, PB$  और  $PC$  एक बिन्दु  $P$  से अपसृत होते हैं और तीन अन्य बल  $AQ, BQ$  और  $CQ$  एक बिन्दु  $Q$  पर संसृत होते हैं।

सिद्ध करो कि इन छः बलों का परिणामीबल परिमाण और दिशा में  $3PQ$  से प्रदर्शित होता है और वह त्रिभुज  $ABC$  के गुरुत्व-केन्द्र से जाता है।

४। त्रिभुज  $ABC$  का  $T$  लाम्बिक-केन्द्र और  $O$  परिकेन्द्र है। सिद्ध करो कि तीन बल  $AT$ ,  $BT$  और  $CT$  का परिणामीबल  $OT$  के द्रुगने में प्रदर्शित होता है।

५। एक त्रिभुज के बाह्य-वृत्तों के केन्द्रों पर रखे हुये तीन कणों का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो, यदि वे कण इन वृत्तों की त्रिज्याओं के व्युत्क्रमानुपाती हैं।

६।  $ABCD$  एक आयत है।  $AD$  में एक बिन्दु  $P$  इस प्रकार ली कि जब त्रिभुज  $PDC$  काट दिया जाय और शेष समलम्ब  $ABCP$ ,  $P$  से लटकाया जाय तो उसकी भुजायें  $AP$  और  $BC$  क्षैतिज रहे।

७। एक त्रिभुजीय पटल  $ABC$ , जिसका कोण  $C$  अधिक-कोण है, एक मेज पर इस प्रकार खड़ा है कि उसकी भुजा  $AC$  मेज को स्पर्श करती है। सिद्ध करो, यदि त्रिभुज का भार  $W$  है, तो  $B$  से लटकाया गया वह लघुतम भार जो त्रिभुज को उलट देता है

$$\frac{3}{2}W \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$$

है। इस परिणाम की व्याख्या करो यदि  $c^2 > a^2 + 3b^2$ ।

८। ताश की एक गड्डी मेज पर इस प्रकार रखी हुई है कि प्रत्येक पत्ता अपने नीचे के पत्ते से गड्डी की लम्बाई की दिशा में बाहर निकला हुआ है। यदि प्रत्येक पत्ता इतना बाहर निकला है जितना वह अधिक में अधिक निकल सकता है, तो सिद्ध करो कि उत्तरोत्तर पत्तों के सिरो के बीच की दूरियाँ हरात्मक श्रेणी में होंगी।

९। यदि  $aA, bB, cC, \dots, nN$  बलों को प्रदर्शित करते हैं, जिनके प्रयोग-बिन्दु  $a, b, c, \dots$  और सिरे  $A, B, C, \dots$  हैं, तो सिद्ध करो कि उनका परिणामीबल परिमाण और दिशा में  $ngG$  है, जहाँ पर  $g, n$  बराबर

कणों  $a, b, c, \dots$  का, और  $G, n$  बराबर कणों  $A, B, C, \dots$  का जड़त्व-केन्द्र है।

यदि  $g$  और  $G$  एक हो जायें तो क्या होगा ?

१०। एक पिंड से जिसका भार  $W$  है,  $w$  भार का एक भाग काट कर  $x$  दूरी पर हटा दिया गया है। सिद्ध करो कि सम्पूर्ण पिंड के गुरुत्व-केन्द्र के दोनों स्थानों को मिलाने वाली रेखा हटायें हुये भाग के गुरुत्व-केन्द्र के दोनों स्थानों को मिलाने वाली रेखा के समानान्तर है।

११। एक ही पदार्थ के दो समदंड  $AB$  और  $AC$ ,  $A$  पर दृढ़ता से जुड़े हुये हैं। कोण  $BAC = 60^\circ$ , और  $AB$  की लम्बाई  $AC$  की लम्बाई से दुगुनी है। यदि  $G$  दंडों का जड़त्व-केन्द्र है, तो सिद्ध करो कि  $BG = AC \sqrt{\frac{1}{3}}$ । यदि दंड बिना रोकटोक के  $AB$  के सिरे  $B$  से लटका दिये जायें, तो सिद्ध करो कि  $A$  पर क्रिया दंडों के भार  $W$  के एक तिहाई भार के बराबर ऊर्ध्वापर बल और  $\frac{1}{3}W \frac{AC}{\sqrt{19}}$  घूर्ण के एक बलयुग्म के बराबर होगी।

१२। यदि एक फाटक के कर्जों के बीच की दूरी ४ फुट फाटक की चौड़ाई १० फुट और उसका भार ५०० पौं० है, तो यह मान कर कि फाटक का सारा भार नीचे के कर्जों पर है सिद्ध करो कि ऊपर के कर्जों पर दबाव ६२५ पौं० भार के बराबर है।

१३। एक सीढ़ी जिसका आकार अक्षर  $A$  का है, और जिसकी प्रत्येक टांग ऊर्ध्वापर से  $\alpha$  कोण बनाती है, एक क्षैतिज फर्श पर रखी हुई है, और उसे उसकी टांगों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली डोरी घामे हुये हैं। यदि धपेण कही भी न हो तो सिद्ध करो कि यदि उसकी एक टांग पर फर्श में उसकी ऊँचाई की  $\frac{1}{n}$  ऊँचाई पर भार  $W$  रखा दिया जाय, तो डोरी के तनाव में  $\frac{1}{n}W$  स्पष्ट  $\alpha$  वृद्धि होगी।

१४। एक बेलन, जिसकी त्रिज्या  $r$  और अक्ष क्षैतिज अवस्था

में नियत है, एक ऊर्ध्वाधर दीवार को अपनी एक जनकरेखा पर स्पर्श करता है। एक चपटी समछड़ जिसकी लम्बाई  $2l$  और भार  $W$  है, का एक सिरा, दीवार पर और दूसरा सिरा बेलन पर रखा हुआ है। यदि छड़ ऊर्ध्वाधर से  $45^\circ$  का कोण बनाती है, तो सिद्ध करो कि, यदि घर्षण न हो, तो  $\frac{l}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}}$ , दीवार पर दबाव  $\frac{1}{2}W$  और बेलन पर प्रतिबल  $\frac{1}{2}\sqrt{5}W$  होगा।

१५। एक सम दंड, जिसकी लम्बाई  $32a$  है, त्रिज्या  $a$  के एक चिकने बेलनाकार प्याले के भीतर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका कुछ भाग प्याले के भीतर और कुछ बाहर है। सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में दंड क्षैतिज से  $60^\circ$  का कोण बनाता है, और यह भी सिद्ध करो कि बेलन लुढ़क जायगा यदि उसका भार दंड के भार से कम से कम छः गुना न हो।

१६। एक प्याला, जिसका अन्तः पृष्ठ गोलाकार है, एक अक्ष के चारों ओर, जिसकी गोले के केन्द्र से गहराई  $c$  और प्याले के गुरुत्व-केन्द्र से ऊँचाई  $a$  है, बेरोक टोक घूम सकता है। प्याले के पेंदे में एक भारी गेंद रखी हुई है। सिद्ध करो कि यदि गेंद का भार प्याले के भार के  $\frac{a}{c}$  से बढ़ जाय तो प्याला उलट जायगा।

१७। एक बन्द पतला अर्ध-गोलीय कवच, जिसका आधार समतल है, पानी से भरा हुआ है। यदि, उसे आधार के किनारे के किसी बिन्दु से लटकाया जाय तो उसका आधार ऊर्ध्वाधर से कोण  $\alpha$  बनाता है। सिद्ध करो कि पानी और कवच के भारों में निम्नलिखित स्पष्टता  $\alpha = \frac{1}{2} : \frac{3}{2}$ —स्पष्टता  $\alpha$  है।

१८। पतली घातु का बना हुआ एक खोखला बेलन, जिसकी त्रिज्या  $a$  है और जो दोनों सिरों पर खुला हुआ है, एक चिकने क्षैतिज घरातल पर रखा हुआ है। उसके भीतर दो चिकने गोले, जिनकी त्रिज्या  $r$  है, एक दूसरे के ऊपर रखे हुये हैं,  $2r > a$  और  $< 2a$ । यदि बेलन का भार  $W$  और एक

गोठे का भार  $W'$  है, तो सिद्ध करो कि बेलन बिना लुढ़कें सीया खड़ा रहेगा, यदि

$$W a = 2W' (a - r).$$

१९। एक समद्विबाहु त्रिभुजीय पटल, जिसका धरातल ऊर्ध्वाधर है, दो चिकनी खूंटियों के बीच में जो एक ही क्षैतिज रेखा में हैं, इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका शीर्ष नीचे की ओर है। सिद्ध करो कि वह समतुलित अवस्था में होगा यदि उसका आधार ऊर्ध्वाधर में कोण  $\cos^{-1}(\cos \alpha)$  बनाये, जहाँ पटल का शीर्ष-कोण  $2\alpha$  और आधार की लम्बाई खूंटियों की दूरी की तिगुनी है।

२०। एक समपार्श्व, जिसका अनुप्रस्थ-परिच्छेद एक समत्रिबाहु त्रिभुज है, दो चिकने धरातलों पर जो क्षैतिज में  $\alpha$  और  $\beta$  कोण बनाते हैं, इस प्रकार रखा हुआ है कि उसकी दो कोरें क्षैतिज हैं। यदि इन कोरों से खींचा गया धरातल ऊर्ध्वाधर में  $\theta$  कोण बनाता है, तो सिद्ध करो

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{3} \cos \alpha \cos \beta + \cos (\alpha + \beta)}{\sqrt{3} \cos (\alpha - \beta)}.$$

२१। एक समत्रिबाहु त्रिभुज के आकार के एक पतले तहते के आधार का एक चौथाई भाग एक क्षैतिज मेज के किनारे पर रखा है, तहते का भार 1 पौ० है और उसे गिरने से एक डोरी रोके हुये है जो उसके शीर्ष और मेज के एक बिन्दु से जो त्रिभुज के ऊर्ध्वाधर धरातल में है, बँधी हुई है। यदि डोरी की लम्बाई त्रिभुज के आधार में उसके शीर्ष की दूरी से दुगुनी हो तो उसका तनाव मान्यम करो।

२२। एक ठोस शंकु, जिसकी ऊँचाई  $h$  और अर्द्ध शीर्ष-कोण  $\alpha$  है, का आधार एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार से टिका हुआ है। उसके शीर्ष और दीवार के एक बिन्दु में बँधी हुई एक डोरी उसे सम्हाले हुये है। सिद्ध करो कि डोरी की महत्तम लम्बाई  $h\sqrt{1 + \frac{1}{3}\tan^2 \alpha}$  है।

२३। एक शंकु की ऊँचाई  $h$  और त्रिज्या  $r$  है। एक डोरी जो उसके शीर्ष और वृत्ताकार आधार की परिधि के एक बिन्दु में

बँधी हुई है, एक चिकनी सूंटी पर लटकी हुई है। सिद्ध करो कि यदि शंकु का अक्ष क्षैतिज है, तो डोरी की लम्बाई  $\sqrt{h^2 + 4r^2}$  होनी चाहिये।

२४। एक चिकने घरातल पर तीन बराबर चिकने गोले एक दूसरे को स्पर्श करते हुये रखे हैं। बिना छोर की एक डोरी जो उनके केन्द्रों के घरातल में है, उन्हें एक दूसरे से अलग नहीं होने देती है। यदि एक चौथा गोला उनके ऊपर रखा जाय, तो सिद्ध करो कि डोरी के तनाव की प्रत्येक गोले के भार से निष्पत्ति  $1:3\sqrt{6}$  है।

२५। एक चिकने दंड की लम्बाई  $2a$  है, और उसका एक सिरा एक घरातल पर जिनका क्षैतिज में  $\alpha$  झुकाव है, रखा हुआ है। वह एक क्षैतिज पट्टी द्वारा, जो घरातल के समानान्तर और  $c$  दूरी पर है, रखा हुआ है। सिद्ध करो कि दंड का आनत तल से झुकाव  $\theta$  समीकरण  $c \text{ ज्या } \alpha = a \text{ ज्या } \theta \text{ कोज्या } (\theta - \alpha)$  से दिया जाता है।

२६। एक वर्गाकार तल्ला दीवार के सहारे एक डोरी से जो उसके ऊपर के किनारे के दो सिरों से बँधी हुई है और एक पूर्णतया चिकनी सूंटी पर से जाती है, चपटा लटका हुआ है। यदि डोरी की लम्बाई तल्ले के विकर्ण से छोटी है तो सिद्ध करो कि समतुलन की तीन अवस्थायें हो सकती हैं।

२७। एक अर्द्ध-गोलीय प्याला, जिसकी त्रिज्या  $r$  है, एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है और उसके भीतर एक छड़, जिसकी लम्बाई  $2l$  है और जिनका भार प्याले के भार के बराबर है, इस प्रकार रखी हुई है कि उसका कुछ भाग प्याले के भीतर और कुछ बाहर है। सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था समीकरण

$$l \text{ ज्या } (\alpha + \beta) = r \text{ ज्या } \alpha = -2r \text{ कोज्या } (\alpha + 2\beta)$$

द्वारा दी जाती है, जहाँ पर  $\alpha$  अर्द्ध-गोले के आधार का क्षैतिज से झुकाव है, और  $2\beta$  वह कोण है जो छड़ का प्याले के भीतर का भाग गोले पर केन्द्र बनाता है।

२८। एक सम दंड, जिसका भार  $W$  है दीवार में दो सूंटियों से दो ऊर्ध्वाधर डोरियों द्वारा, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई  $l$  है, और जो उनके

सिरो से बँधी हुई है, क्षैतिज अवस्था में लटका हुआ है। एक चिकना बिना भार का टंक, जिसका क्षीर्ण कोण  $30^\circ$  है, डोरियों को बिना स्पर्श किये ऊर्ध्वाधर बल  $\frac{W}{2}$  से नीचे की ओर दीवार और दंड के बीच में दबाया जा रहा है। टंक की नीचे की ओर क्षैतिज है और उसका एक फलक दीवार को स्पर्श करता है। दीवार से वह दूरी मालूम करो जो दंड ढकेला गया है।

२९।  $AB$  एक चिकना धरातल है जो क्षैतिज से  $\alpha$  कोण बनाता है, और उसके नीचे के सिरे  $A$  पर एक कच्चा लगा है जिससे, बिना घर्षण के,  $2a$  लम्बाई का एक भारी चिकना तलछटा  $AC$  लगा हुआ है। धरातल और तलछटे के बीच एक चिकना बेलन जिसकी त्रिज्या  $r$  है, रखा हुआ है। बेलन ऊपर से तलछटे के दबाव के कारण धरातल के नीचे फिसलने से रुका हुआ है। यदि तलछटे का भार  $W$ , बेलन का भार  $W'$ , और तलछटे और धरातल के बीच का कोण  $\theta$  है, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{W'r}{W a} = \cot \alpha (\alpha + \theta) \frac{1 - \cot \alpha \theta}{\cot \alpha}.$$

३०। दो चिकने किनारों के बराबर वृत्ताकार मंडल, जिनकी त्रिज्यायें  $r$  हैं, अपने चपटे फलकों पर दो चिकने ऊर्ध्वाधर धरातलों के कोने में जो एक दूसरे से कोण  $2\alpha$  बनाते हैं, इस प्रकार रखे हुये हैं कि वे दोनों धरातल के बीच के कोण को समविभाजित करने वाली रेखा पर एक दूसरे को स्पर्श करते हैं; सिद्ध करो कि उस लघुतम मंडल की त्रिज्या जो उन दोनों के बीच में उनको बिना अलग किये हुये दबाई जा सकती है  $r$  (युक्तकोण  $\alpha - 1$ ) होगी।

३१।  $ABCD$  चार बिना भारकी स्वतंत्रतापूर्वक जुड़ी हुई छड़ों से बना हुआ एक आयताकार ढाँचा है, जिनमें से छड़  $AD$  ऊर्ध्वाधर अवस्था में नियत है। ऊपर की छड़  $AB$  के एक दिष्ट हुये बिन्दु  $P$  पर एक भार रखा हुआ है और ढाँचा  $AC$  डोरी से आयताकार रखा जाता है। डोरी का तनाव मालूम

करो और सिद्ध करो कि इस सनाव में कोई परिवर्तन नहीं होगा यदि यही भार नीचे की छड़ पर अपने पहले स्थान के ठीक ऊर्ध्वाधर नीचे रखा जाय।

३२। एक सम दंड  $MN$  के सिरे दो नियत सीधी रूक्ष नलियों  $OA$  और  $OB$  में, जो एक ही ऊर्ध्वाधर घरातल में हैं और जो क्षैतिज से कोण  $\alpha$  और  $\beta$  बनाती हैं, रखे हुये हैं। सिद्ध करो जब सिरा  $M$  दिशा  $AO$  की ओर फिसलने की अवस्था में है, तो क्षैतिज से  $MN$  के झुकाव की स्पष्टज्या  $\frac{\text{ज्या } (\alpha - \beta - 2\epsilon)}{2 \text{ ज्या } (\beta + \epsilon) \text{ ज्या } (\alpha - \epsilon)}$  है, जहाँ पर  $\epsilon$  घर्षण-कोण है।

३३। एक रूक्ष आनत घरातल पर, जिसका क्षैतिज से झुकाव घर्षण-कोण  $\lambda$  से अधिक है, रखा हुआ एक दंड अपने एक सिरे के चारों ओर, जो घरातल से लगा हुआ है, स्वतन्त्रतापूर्वक घूम सकता है। सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में दंड का महत्तम ढाल-रेखा से अधिक से अधिक झुकाव ज्या<sup>-१</sup> (स्पष्टज्या  $\lambda$  कोस्पष्टज्या  $\alpha$ ) हो सकता है।

३४। दो बराबर सम दंड, जिनकी लम्बाई  $2a$  हैं, एक सिरे पर एक कब्जे द्वारा जुड़े हुये हैं, और सममित रूप से एक रूक्ष नियत गोले पर जिसकी त्रिज्या  $c$  है रखे हुये हैं। समतुलन की सीमान्त अवस्था मालूम करो और सिद्ध करो, यदि घर्षण-गुणक  $\frac{c}{a}$  है तो प्रत्येक दंड का ऊर्ध्वाधर से सीमान्त झुकाव स्पष्टज्या<sup>-१</sup>  $\sqrt{c \div a}$  है।

३५। एक सीधा समदंड, जिसकी लम्बाई  $2c$  है, क्षैतिज अवस्था में एक खोखले रूक्ष गोले के भीतर, जिसकी त्रिज्या  $a$  है, यथा-सम्भव ऊँचे से ऊँचा रखा हुआ है। सिद्ध करो कि दंड के मध्य-बिन्दु को गोले के केन्द्र से मिलाने वाली रेखा ऊर्ध्वाधर से स्पष्टज्या<sup>-१</sup>  $\frac{\mu a}{\sqrt{a^2 - c^2}}$  कोण बनाती है।

३६। एक रूक्ष दंड क्षैतिज अवस्था में नियत है और एक दूसरा दंड जिसका एक सिरा एक नियत बिन्दु से एक कब्जे द्वारा लगा हुआ है, समतुलित



अवस्था में नियत दंड पर रखा हुआ है। यदि नियत बिन्दु से नियत दंड पर ढाले गये लम्ब की लम्बाई  $b$  है और लम्ब क्षैतिज से  $\alpha$  कोण बनाता है, तो सिद्ध करो कि उस बिन्दु तक नियत दंड का भाग जिस पर सरकने वाला दंड ठहरता है,

$$\frac{2\mu b \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \mu^2} \cos \alpha}$$

है, जहाँ पर  $\mu$  घर्षण-गुणक है।

३७। एक काँच का दंड, कुछ तो एक बेलनाकार प्याले के भीतर और कुछ बाहर रखा हुआ समतुलित अवस्था में है। दंड का नीचे का सिरा प्याले के ऊर्ध्वाधर पहलू के किनारे पर रखा है। यदि  $\alpha$  और  $\beta$  वे बड़े से बड़े और छोटे से छोटे कोण हैं जो दंड ऊर्ध्वाधर में बना सकता है, तो सिद्ध करो कि घर्षण-कोण

$$\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos \alpha + \cos^2 \beta \cos \beta} \text{ है।}$$

३८। एक दंड कुछ तो एक आयताकार समानान्तर पट्टाकार के आकार के सन्दूक के भीतर और कुछ बाहर रखा हुआ है। दंड अपने एक सिरे से सन्दूक के रुख ऊर्ध्वाधर पहलू को दबाता हुआ तथा सम्मुख के विकर्ण किनारे को स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है। सन्दूक का भार दंड के भार का चौगुना है। सिद्ध करो, यदि दंड फिसलने की अवस्था में है और उसी समय सन्दूक भी लुढ़कने की है, तो दंड ऊर्ध्वाधर से कोण

$$\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \cos \lambda \right)$$

यतायेगा, जहाँ पर  $\lambda$  घर्षण-कोण है।

३९। एक भारी सम दंड एक रुख क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है। दंड के किसी बिन्दु से ठोरी बांधकर दंड को अपनी लम्बाई की लम्ब दिशा में खींचा जाता है। बताओ दंड किस बिन्दु के चारों ओर घूमना आरम्भ करेगा।

यह भी सिद्ध करो कि उन बलों में जो दंड के मध्यबिन्दु और सिरे पर

उसकी लम्ब दिशा में लगा कर उसे फिसला सकते हैं,  $\sqrt{2}+1:1$  निम्पत्ति है।

४०। एक हल्के दंड के मध्य बिन्दु से बराबर दूरी  $c$  पर दो बराबर भारी कण लगे हुये हैं और बराबर दूरी  $a$  पर दो डोरियाँ बंधी हुई हैं। दंड अब एक रूख क्षैतिज मेज पर रखा जाता है और डोरियों को दंड की लम्ब दिशा में ऊर्ध्वाधर से दंड के विपरीत ओर वही कोण  $\theta$  बनाते हुये खोला जाता है। वह लघुतम दबाव मालूम करो जो दंड को घुमा सकता है और सिद्ध करो, यदि घर्षण-गुणक  $\frac{a}{c}$  है, तो दबाव उस समय लघुतम होगा जब  $\theta=45^\circ$ ।

४१। दो बराबर समरूप पिंड  $A$  और  $B$  जिनमें से प्रत्येक का भार  $W$  है, एक हल्की डोरी से बंधे हुये एक रूख क्षैतिज धरातल पर रखे हुये हैं और घर्षण-गुणक  $\mu$  है। एक बल  $P$ , जो  $2\mu W$  से कम है,  $A$  पर  $BA$  दिशा में लगाया गया है, और उसकी दिशा धीरे धीरे क्षैतिज धरातल में  $\theta$  कोण से घुमाई जाती है। सिद्ध करो, यदि  $P, \sqrt{2} \mu W$  में बढ़ा जाय, तो दोनों भार फिसलेंगे जब कोण  $\theta = \frac{P}{2\mu W}$ ; परन्तु यदि  $P, \sqrt{2} \mu W$  में कम और  $\mu W$  में बढ़ा है तो केवल  $A$  फिसलेगा जब ज्या  $\theta = \frac{\mu W}{P}$ ।

४२। एक रूख सम छड़  $AB$  दो अन्य छड़ों पर बिन्दु  $A$  और  $C$  पर क्षैतिज अवस्था में रखी हुई है। सिद्ध करो कि  $B$  पर  $BA$  की लम्ब दिशा में कार्य करता हुआ लघुतम क्षैतिज बल जो छड़ को फिसला सकता है,  $\frac{1}{2} \mu W$  और  $\mu W \frac{b-a}{2a-b}$  में से छोटा बल है, जहाँ  $AB=2a, AC=b, W$  छड़ का भार और  $\mu$  घर्षण-गुणक है।

४३। एक रूख सम छड़  $AB$ , जिसकी लम्बाई  $2a$  है, दो बराबर और समान रूख गेंदों पर क्षैतिज अवस्था में, उन्हें  $C$  ओर  $D$  पर

स्पर्श करता हुआ, रखा हुआ है। गेंदों के केन्द्रों की दूरी  $b$  है। सिद्ध करो यदि  $b, \frac{4a}{3}$  से अधिक न हो तो छड़ की एक ऐसी अवस्था मालूम की जा सकती है जिसमें  $B$  पर छड़ की लम्ब दिशा में लगा हुआ एक बल  $P$  उसे  $C$  और  $D$  दोनों पर एक ही समय फिसलने की सीमा पर कर देगा।

४४। एक भारी सम छड़ दो विभिन्न रूक्षता के नियत घ्रातलों के बीच में, जो क्षैतिज से नियत कोण बनाते हैं, घ्रातलों के लम्ब एक ऊर्ध्वाधर घ्रातल में, क्षैतिज अवस्था में रखी हुई है। वह प्रतिबन्ध मालूम करो छड़ समतुलित हो जाय।

४५। एक सम दंड सीमान्त समतुलित अवस्था में है। उसका एक सिरा रूक्ष क्षैतिज घ्रातल पर और दूसरा एक उतने ही रूक्ष आनत घ्रातल पर है जिसका क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है। यदि घर्पण-कोण  $\lambda$  है और दंड एक ऊर्ध्वाधर घ्रातल में है तो सिद्ध करो क्षैतिज से दंड का झुकाव  $\theta$ ,

$$\text{स्पज्या } \theta = \frac{\text{ज्या } (\alpha - 2\lambda)}{2 \text{ ज्या } \lambda \text{ ज्या } (\alpha - \lambda)}$$

द्वारा दिया जाता है।

४६। यदि एक परकार एक चिकने क्षैतिज बेलन पर, जिसकी त्रिज्या  $c$  है, आड़ी रखी हुई है, तो सिद्ध करो कि जोड़ पर घर्पणीय बल युग्म जो परकार की भुजाओं को फिसलने से रोकता है

$$1/2 (c \text{ कोस्पज्या } \alpha \text{ स्पुज्या } \alpha - a \text{ ज्या } \alpha)$$

होना चाहिये, जहाँ  $1/2$  परकार की प्रत्येक भुजा का भार  $2a$  उनके बीच का कोण और  $a$  किसी भुजा के गुरुत्व-केन्द्र की जोड़ से दूरी है।

४७। मेज की किस्ती के दस्ते किस्ती के पहलुओं से बराबर दूरी पर हैं, और उनके बीच की दूरी  $c$  है। सिद्ध करो कि किस्ती का एक दस्ते से खींचना असम्भव है जबतक कि किस्ती की पीछे से सामने तक की लम्बाई  $\mu c$  से अधिक न हो।

४८। यदि खिड़की के शीशे के चौखटे की पट्टी की एक डोरी टूट

जाय तो चौखटे और पट्टी के बीच का लघुतम घर्षण-गुणक मालूम करो यदि दूसरा भार फिर भी खिड़की को सम्हाल सके।

४९। एक वृत्ताकार छल्ला, जिसकी त्रिज्या एक फुट है, एक क्षैतिज दंड पर लटका हुआ है, और एक आदमी छल्ले से एक हाथ से लटकता है। यदि छल्ले और दंड के बीच का घर्षण-गुणक  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  है, तो छल्ले के भार को नगण्य मान कर आदमी के हाथ से दंड की कम से कम सम्भव दूरी मालूम करो।

५०। एक वर्ग, जिसकी भुजा  $2a$ , और घरातल ऊर्ध्वाधर है, दो चिकनी खूंटियों के बीच में, जो एक ही क्षैतिज रेखा में हैं, और जिनके बीच की दूरी  $c$  है, रखा हुआ है। सिद्ध करो कि वह समतुलित रहेगा यदि उसकी एक भुजा का क्षैतिज से झुकाव  $45^\circ$  अथवा  $\frac{1}{2} \text{ ज्या}^{-1} \frac{a^2 - c^2}{c^2}$  हो।

५१। तीन बराबर वृत्ताकार मंडल  $A$ ,  $B$  और  $C$ , एक चिकने क्षैतिज घरातल पर एक दूसरे को स्पर्श करते हुये रखे हुये हैं, और इसके अतिरिक्त  $B$  और  $C$  एक रूख ऊर्ध्वाधर दीवार को भी स्पर्श करते हैं। यदि मंडलों की परिधियों के बीच के और मंडलों और दीवार के बीच के घर्षण-गुणक  $2 - \sqrt{3}$  हैं, तो सिद्ध करो जब  $A$  को दीवार की ओर दीवार की लम्ब दिशा में किसी बल  $P$  से ठेला जाय तो उसमें कोई गति नहीं होगी।

५२। यदि एक चक्र और घुरी का गुरुत्व-केन्द्र घुरी से  $a$  दूर हो, तो सिद्ध करो चक्र समतुलित रहेगा जब उसका घरातल घुरी और गुरुत्व-केन्द्र से जाते हुए ऊर्ध्वाधर मे  $\theta$  मे कम कोण बनावे, जहाँ  $\text{ज्या } \theta = \frac{b}{a} \text{ ज्या } \phi$ ,  $b$  घुरी की त्रिज्या और  $\phi$  घर्षण-कोण है।

५३। एक कण जिसका भार  $w$  है, एक रूख आनत घरातल पर जिसका भार  $W$  और झुकाव  $\alpha$  है, रखा हुआ है। आनत घरातल का

आधार एक रूक्ष मेज पर है और दोनों के लिये घर्षण गुणक एक ही है। यदि धीरे धीरे बढ़ता हुआ बल कण  $w$  पर घरातल के पृष्ठ पर लगाया जाय, तो बताओ क्या कण घरातल के मेज से फिसलने में पहले घरातल के ऊपर की ओर सरकेगा ?

५४। एक रूक्ष बेलन, जिसका भार  $W'$  है, एक घरातल पर, जिसका क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है, इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका अक्ष क्षैतिज है और एक आदमी, जिसका भार  $W$  है और शरीर ऊर्ध्वाधर है बेलन के ऊपर खड़ा होकर उसे समतुलित रखता है। यदि उसके पाँव  $A$  पर है और  $A$  से खींचा हुआ बेलन का ऊर्ध्वाधर परिच्छेद घरातल को  $B$  पर स्पर्श करता है, तो यदि घर्षण फिसलना रोकने के लिये पर्याप्त हो तो सिद्ध करो कि कोण  $\theta$ , जो परिच्छेद के केन्द्र पर  $AB$  से बनता है, समीकरण

$$W \text{ ज्या } (\theta + \alpha) = (W + W') \text{ ज्या } \alpha$$

द्वारा दिया जाता है।

५५। दो रूक्ष सम गोले, जिनकी त्रिज्याएँ बराबर हैं परन्तु भार  $W_1$  और  $W_2$  हैं, एक गोलाकार व्याले के भीतर रखे हुये हैं। उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज है और व्याले के केन्द्र पर कोण  $2\alpha$  बनाती है। सिद्ध करो उनके बीच का घर्षण-गुणक

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} \text{ स्पज्या } \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

से कम नहीं है।

५६। दो बिना भार के दृढ़ दंड इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि वे एक दूसरे पर लम्ब हैं। उनके जोड़ पर एक भार लगाया गया है और वे दो रूक्ष सँटियों पर जो एक ही क्षैतिज घरातल में है और जिनके घर्षण-गुणक  $\mu$  और  $\mu'$  हैं, रखे हुये हैं। सिद्ध करो कि वे समतुलित अवस्था में किसी भी ओर कोण  $\frac{1}{2} \text{ स्पज्या }^{-1} \frac{\mu + \mu'}{2}$  बिना फिसले घुमाये जा सकते हैं।

५७। एक गोला जिसका भार  $W$  है, एक रूक्ष घरातल पर जिसका

क्षैतिज से भुजाय  $a$  है जो घर्पण-कोण से कम है, रखा हुआ है। सिद्ध करो गोले पर घरातल के समानान्तर व्यास के ऊपरी सिरे पर लगा हुआ भार

$IV' = \frac{\text{ज्या } a}{\text{कोज्या } a} = \frac{1}{\cos a}$  गोले को घरातल के नीचे की ओर लुढ़कने से ठीक रोक मकेगा।

इस भार को थोड़ा सा कम करने अथवा बढ़ाने से क्या प्रभाव पड़ेगा ?

५८। दो बराबर समदंड अपने एक सिरे पर  $V$  बनाते हुये दृढ़ता से जुड़े हुये हैं। उनके शीर्ष पर कोण  $2a$  है, और वे एक लम्ब ऊर्ध्वाधर वृत्त पर आड़े रखे हुये हैं। वृत्त की त्रिज्या इतनी बड़ी है कि  $V$  का गुहत्व-केन्द्र वृत्त की परिधि पर है और घर्पण-कोण  $c$  है। यदि  $V$  ठीक फिसलने की सीमा पर हो जब उसके शीर्ष और वृत्त के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज है, तो सिद्ध करो कि  $\text{ज्या } c = \sqrt{\text{ज्या } a}$ ।

यदि दंड दृढ़ता से जुड़े होने की जगह कन्डो द्वारा जुड़े हुये हो और उनके स्वतन्त्र सिरे एक डोरी से मिला दिये जायें, तो सिद्ध करो कि मिलाने वाली डोरी वृत्त को नहीं मिलेगी यदि  $\text{ज्या } a < \frac{1}{2}$ । यदि यह प्रतिबन्ध सन्तुष्ट किया जाता हो, तो सिद्ध करो कि यदि  $V$  ठीक फिसलने की सीमा पर हो, जब उसके शीर्ष और वृत्त के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज है, तो डोरी का तनाव

$$\frac{IV'}{2} \sqrt{1 + \text{ज्या } a}$$

होगा, जहाँ पर  $IV'$  प्रत्येक दंड का भार है।

५९। एक आयताकार ऊर्ध्वाधर छड़, जिसका भार  $IV'$  है, मार्ग-दर्शकों से केवल अपनी ही दिशा में सरकने को नियंत्रित है, और उसके नीचे का सिरा एक चिकने फर्श पर रखा हुआ है। यदि दिये हुये ढाल का एक चिकना आनत घरातल पोछे लगाये हुये एक क्षैतिज बल से उसके नीचे ढेला जाय, तो बाञ्छित बल का परिमाण मालूम करो।

यदि घर्पण केवल फर्श और आनत घरातल के बीच में हो और

अन्य स्थानों पर न हो, तो  $\mu$  का लघुतम मान मालूम करो यदि श्रान्त घरातल छड़ के नीचे किसी दी हुई अवस्था में छोड़ दिये जाने पर बिना बाहर निकले रह सके।

६०। एक वृत्ताकार मंडल, जिसका भार  $W$  और त्रिज्या  $a$  है, तीन बराबर ऊर्ध्वाधर डोरियों से, जिनकी लम्बाइयाँ  $b$  हैं और जो उसकी परिधि पर बराबर दूरी पर बंधी हुई हैं, क्षैतिज अवस्था में लटका हुआ है। सिद्ध करो कि उस क्षैतिज बलयुग्म का परिमाण जो इसे  $\theta$  कोण मोड़े रख सकता है,

$$W a^2 \frac{\text{ज्या } \theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2 \text{ज्या}^2 \frac{\theta}{2}}} \text{ होगा।}$$

६१। दो छोटे छोटे छल्ले, जिनमें से प्रत्येक का भार  $W$  है, ऊर्ध्वाधर घरातल में दो दंडों पर, एक छल्ला एक दंड पर और दूसरा दूसरे पर, सरकते हैं, और प्रत्येक दंड ऊर्ध्वाधर से  $\alpha$  कोण बनाता है। छल्ले एक दूसरे से एक बारीक स्थिति-स्थापक तार से, जिसकी वास्तविक लम्बाई  $2a$  और स्थिति-स्थापन-मापक  $\lambda$  है, बंधे हुये हैं। प्रत्येक दंड और छल्ले के बीच का घर्षण-गुणक स्पर्शज्या  $\beta$  है। यदि तार क्षैतिज हो, तो सिद्ध करो कि प्रत्येक छल्ला दंड के अतः खड़े जिसकी लम्बाई

$W \lambda^{-1} a \text{ व्युज्या } \alpha \{ \text{कोस्पज्या } (\alpha - \beta) - \text{कोस्पज्या } (\alpha + \beta) \}$  है, के किसी भी बिन्दु पर ठहर सकता है।

६२। एक टंक, जिसका कोण  $60^\circ$  है, एक चिकनी मेज पर रखा हुआ है, और उसके तिरछे पृष्ठ पर  $20$  पी० का एक भार उस पृष्ठ पर पड़ी हुई डोरी से सम्हाला जाता है। डोरी टंक के शिखर के एक चिकने छल्ले के भीतर से जाती हुई ऊर्ध्वाधर लटकते हुये भार  $W$  को सम्हाले हुये है।  $W$  का परिमाण मालूम करो।

वह क्षैतिज बल भी मालूम करो जो टंक को समतुलित रख सके  
(१) जब छल्ला टंक से न लगा हो,

(२) जब छल्ला टंक से लगा हो ।

इस प्रश्न को टंक का तिरछा पृष्ठ रूख, घर्षक-गुणक  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  और 20 पौं० का भार नीचे फिसलने की सीमा पर मान कर भी हल करो ।

६३ । सिद्ध करो कि वह सामर्थ्य, जो एक वेलन को, जिसकी निज्या  $r$  और भार  $W$  है, एक चिकने आनत घरातल पर, जिसका क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है, एक क्रोबार, जिसकी लम्बाई  $l$  है और जिसका क्षैतिज से झुकाव  $\beta$  है, की सहायता से फिसला सकते हैं

$$\frac{Wr}{l} \frac{\sin \alpha}{1 + \cot \alpha \cot \beta} \text{ होगी ।}$$

६४ । एक चिट्ठी सौलने वाली मशीन में एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज  $ABC$  के आकार की एक सम प्लेट लगी है । प्लेट का भार 3 औंस है, और वह एक नियत बिन्दु से जिसमें कि एक गुनिया (साहुल-मून) भी लटकी हुई है, समकोण  $C$  पर से लटकाया गया है । चिट्ठियाँ कोण  $A$  से लटकाई जाती हैं और उनका भार  $AB$  पर लगे हुये अंशांकित पटरी, जिस पर 1 औं०, 2 औं०, 3 औं० इत्यादि भाग चिन्हित हैं, को जहाँ गुनिया काटती है, उस स्थान द्वारा पढ़े जाते हैं । सिद्ध करो कि पटरी पर अंशों की  $A$  से दूरियाँ हरात्मक श्रेणी में हैं ।

६५ । दो आदमी  $A$  और  $B$ , एक सीढ़ी को, जो हर प्रकार से सम है और जिसकी लम्बाई  $l$  और भार  $W$  है, क्षैतिज अवस्था में ऊर्ध्वाधर अवस्था में उठाते हैं ।  $A$  एक सिरे पर खड़ा होता है और  $B$ , सीढ़ी के नीचे जाकर दूसरे सिरे से सीढ़ी के उत्तरोत्तर बिन्दुओं को अपने सिर के ऊपर भूमि से  $d$  फुट की ऊँचाई पर पकड़ता हुआ  $A$  की ओर बढ़ता है । जिस बल का वह प्रयोग करता है वह ऊर्ध्वाधर रहता है । बताओ इस प्रकार  $A$  से  $n$  फुट की दूरी के एक बिन्दु पर सीढ़ी को रोकने में  $B$  किस बल का प्रयोग करता है, और सिद्ध करो  $n$  वें फुट से  $(n-1)$  वें फुट तक जाने में जो कर्म उसने किया वह  $\frac{Wld}{2n(n-1)}$  है ।



प्रताओ  $A$  को अपने पैरों से सीढ़ी के सिरो को नीचे की ओर कच देवाना चाहिये ।

६६। सिद्ध करो कि किसी मेज की साधारण किस्ती उसके एक दस्ते पर बल लगा कर भीतर की ओर नहीं डकेली जा सकती जबतक उसे  $a\mu$  दूरी तक किसी दूसरी रीति से बल लगा कर न डकेल दिया जाय, जहाँ पर  $a$  दस्तों के बीच की दूरी है और  $\mu$  घर्षण-गुणक है ।

६७। तीन बराबर सम दंडों के सिरे का, भार जिनमें में प्रत्येक  $W$  है, इस प्रकार कन्धों द्वारा जुड़े हुये हैं कि उनसे एक समत्रिबाहु त्रिभुज बन जाता है । त्रिभुज इस प्रकार क्षैतिज अवस्था में रखा हुआ है कि प्रत्येक दंड एक चिकने शंकु को स्पर्श करता है जिसका अर्द्ध-शीर्ष कोण  $\alpha$  और अक्ष ऊर्ध्वाधर है । सिद्ध करो कि प्रत्येक कन्धे पर त्रिबाहु  $W$  को स्पष्टता  $\frac{a}{\sqrt{3}}$  है ।

६८। एक चरखी, जिस पर एक धुरी है जिसके दो वृत्तीय सिरे हैं, एक रुख आनत घरातल पर रखी हुई है और एक तागा उससे लिपटा हुआ है जो खुलता जाता है और चरखी नीचे की ओर लुढ़कती जाती है । धुरी की त्रिज्या  $c$  और वृत्तीय सिरों की त्रिज्यायें  $a$  हैं । - यदि घर्षण-गुणक  $\mu$  और आनत घरातल का क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  हो, तो सिद्ध करो कि चरखी तागे में घगनल के ऊपर खींची जा सकती है यदि  $\mu, \frac{c \text{ ज्या } \alpha}{a - c \text{ कोज्या } \alpha}$  से कम न हो ।

६९। किसी सम चतुर्भुज  $ABCD$  के गुरुत्व-केन्द्र की निम्नलिखित ज्यामितीय रचना को सिद्ध करो :

त्रिभुज  $ABD$  और  $CBD$  के गुरुत्व-केन्द्र  $X$  और  $Y$  मालूम करो ; मान लो  $XY, BD$  को  $U$  पर मिलती है ; तो इष्ट गुरुत्व-केन्द्र  $XY$  पर इस प्रकार बिन्दु का  $G$  होगा कि  $YG = XU$  ।

७०। एक दरवाजे के पेंदे और फ्रॉं के बीच में थोड़ा सा अन्तर है, और एक बिना भार का टंक इस स्थान में डकेला गया है । दरवाजे के आघात

और फर्श के बीच का घर्षण-गुणक शून्य है। यदि टंक का कोण किसी परिमाण से कम हो और उसकी तिरछी कोर चिकनी हो, तो सिद्ध करो कि कोई भी बल दरवाजे को नहीं खोल सकता है।

७१। एक नियत रूख बेलन के ऊपर, जिसकी त्रिज्या  $a$  है, एक पतला सम तल्ले रखा हुआ है, और एक आदमी तल्ले पर ठीक स्पर्श-बिन्दु के ऊपर खड़ा हुआ है। सिद्ध करो कि वह  $(n+1)re$  की दूरी तक धीरे धीरे तल्ले को बेलन पर बिना फिसलाये हुये ही चल सकता है, जहाँ तल्ले का भार आदमी के भार से  $n$  गुना और  $e$  तल्ले और बेलन के बीच का घर्षण-कोण है।

७२। एक छल्ला एक रूख आनत धरातल पर एक ऊर्ध्वाधर धरातल में जो उसे महत्तम ढाल-रेखा में काटता है, खड़ा हुआ है। उसे एक डोरी, जिसका एक सिरा छल्ले की परिधि पर एक बिन्दु से बँधा हुआ है और जो उसके धारों ओर लिपटी हुई उसी धरातल में आनत तल के ऊपर की ओर एक खूँटी से बँधी हुई है, समतुलित अवस्था में रखे हुये है। यदि  $\lambda$  घर्षण-कोण है,  $\theta$  वह कोण है जो छल्ला खूँटी पर बनाता है, और  $\alpha$  धरातल का झुकाव है, तो सिद्ध करो कि यह स्थिति सीमान्त होगी जब  $\theta = \alpha + \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(\alpha - \lambda)}{\cos \lambda} \right]$ । यदि  $\theta$  का मान इससे बड़ा हो तो क्या होगा?

७३। सिद्ध करो कि वह लघुतम बल, जिसे यदि एक भारी सम गोले के पृष्ठ पर लगाये तो वह एक रूख ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे ठीक समतुलित अवस्था में हो जाता है,

$W \cos \alpha$  अथवा  $W \sin \alpha [\sin \alpha - \sqrt{\sin^2 \alpha - 1}]$  है, यदि  $\alpha < \alpha_0$  अथवा  $> \cos^{-1} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , जहाँ पर  $W$  भार और  $\alpha$  घर्षण-कोण है।

७४। एक सम दंड, जिसका भार  $W$  है, एक सिरे पर कब्जे के

चारों ओर स्वतंत्रतापूर्वक घूम सकता है, और उसका दूसरा सिरा एक रुक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे दीवार से कोण  $\alpha$  बनाता हुआ रखा हुआ है। सिद्ध करो कि यह सिरा एक वृत्त के चाप पर, जिसका कोण  $2 \text{ स्पज्या }^{-1} [\mu \text{ स्पज्या } \alpha]$  है, कहीं भी रखा जा सकता है, और दोनों अन्तिम अवस्थाओं में दीवार पर दबाव  $\frac{1}{2} W [\cos 2\alpha + \mu^2]^{-1}$  होगा, जहाँ  $\mu$  घर्षण-गुणक है।

७५। यदि सम घनत्व के एक ठोस अर्द्ध-गोले में से बड़े से बड़े घन काट लिया जाय, तो सिद्ध करो कि शेष पिंड अपने वक्र पृष्ठ के सहारे एक पूर्णतया रुक्ष आनत धरातल पर समतुलित रह सकता है यदि उसका आधार क्षैतिज से कोण  $\text{ज्या}^{-1} \left[ \frac{8(3\pi - \sqrt{6})}{9\pi - 8} \text{ ज्या } \alpha \right]$  बनाये, जहाँ पर  $\alpha$  आनत तल का झुकाव है।

७६। एक बेलनाकार ढाट, जिसकी लम्बाई  $l$  और त्रिज्या  $r$  है, धीरे धीरे एक बोतल की गर्दन से बाहर निकाली जा रही है। यदि बोतल और ढाट के बिना बाहर निकाले हुये भाग के बीच के क्षेत्र की प्रति इकाई पर अभिलम्ब दबाव किसी भी समय स्थिर और  $P$  के बराबर हो, तो सिद्ध करो कि यदि  $\mu$  घर्षण-गुणक है, तो ढाट के निकालने में  $\pi \mu r^2 P$  कर्म करना पड़ेगा।

## उत्तरमाला

### उदाहरणमाला १ (पृष्ठ १७)

- १। (१) 25 ; (२)  $3\sqrt{3}$  ; (३) 13 ; (४)  $\sqrt{61}$  ;  
 (५)  $60^\circ$  ; (६) 15 अथवा  $\sqrt{505}$  ; (७) 3।
- २। 20 पौ० भार ; 4 पौ० भार।
- ३।  $\sqrt{2}$  पौ० भार दक्षिण-पश्चिम दिशा में।
- ४। 205 पौ० भार। ५। P पौ० भार पहले अवयव बल पर लम्ब।
- ६। 11 पौ० भार। ७। 20 पौ० भार। ८। 17 पौ० भार।
- ९।  $60^\circ$ । १०। 3 पौ० भार ; 1 पौ० भार।
- ११। (१)  $120^\circ$  , (२) कोज्या<sup>-1</sup>  $(-\frac{7}{9})$ , अर्थात्  $151^\circ 3'$ ।
- १२। कोज्या<sup>-1</sup>  $(-\frac{1}{2} \frac{A^2+B^2}{A^2-B^2})$ ।
- १३। दोनों दिये हुये बलों के परिणामीबल की दिशा में।
- १४। (१) 238 ; (२) 664 ; (३)  $68^\circ 12'$  ; (४) 2:56।

### उदाहरणमाला २ (पृष्ठ २२)

- १।  $5\sqrt{3}$  और 5 पौ० भार। २। (१)  $\frac{1}{2}P\sqrt{2}$  ; (२)  $\frac{1}{2}\frac{3}{5}P$ ।
- ३। 50 पौ० भार।
- ४। प्रत्येक बल  $\frac{1}{2} 100\sqrt{3}$ , अर्थात् 57.735 पौ० भार के बराबर है।
- ५। 36.603 और 44.83 पौ० भार लगभग।
- ६।  $P(\sqrt{3}-1)$  और  $\frac{P}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ , अर्थात्  $P \times .732$  और  $P \times .5176$ ।
- ८।  $F\sqrt{3}$  और  $2F$ । ९।  $F\sqrt{2}$  दूसरे अवयव बल से  $135^\circ$  पर।
- १०।  $10\sqrt{5}$  ऊर्ध्वाधर से स्पज्या<sup>-1</sup>  $\frac{1}{2}$  (अर्थात्  $22.36, 26^\circ 34'$  पर) कोण बनाता है।

११।  $33.62$  पौ० भार ;  $51.8$  पौ० भार ।

उदाहरणमाला ३ (पृष्ठ २९)

१।  $1:1:\sqrt{3}$  । २।  $\sqrt{3}:1:2$  । ३।  $120^\circ$  ।

४।  $90^\circ, 112^\circ 37' (=180^\circ - \text{कोज्या}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}})$ , और  $157^\circ 23'$  ।

९।  $R_1 = 34.4$  पौ० भार,  $\alpha_1 = 81^\circ$  ;  $R_2 = 6.5$  पौ० भार,  
 $\alpha_2 = 169^\circ$  ।

१०।  $101\frac{1}{2}^\circ$  ;  $57^\circ$  । ११।  $52$  ;  $95^\circ$  । १२।  $67.2$  ;  $101$  ।

१३।  $46$  ;  $138^\circ$  । १४।  $29.6$  ,  $14^\circ$  । १५।  $2.66$  हज़ारवेट ।

उदाहरणमाला ४ (पृष्ठ ३१)

१।  $40$  । २।  $\text{कोज्या}^{-1}(-\frac{1}{2})$  अर्थात्  $104^\circ 29'$  ।

३।  $2\sqrt{3}$  और  $\sqrt{3}$  पौ० भार ।

४।  $15\sqrt{3}$  और  $15$  पौ० भार । ५।  $5:4:1$  ६।  $5$  और  $13$  ।

९।  $12$  पौ० भार ।

१६। सरल रेखा  $C$  और  $AB$  के मध्य-बिन्दु से जाती है ।

१९। 'इष्ट बिन्दु विकर्णों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को समविभाजित करता है ।

२०।  $B$  से  $BL$ ,  $AC$  के समानान्तर खींचो जो  $CD$  को  $L$  पर

मिले ;  $DL$  को  $X$  पर समविभाजित करो ; परिणामी बल  $X$  से  $AD$

के समानान्तर और उससे दोगने बल के बराबर है ।

उदाहरणमाला ५ (पृष्ठ ४०)

१।  $4$  पौ० भार  $AQ$  दिशा में ।

२।  $\sqrt{50+30\sqrt{2}}$  अर्थात्  $9.76$  पौ० भार पहले बल से

$\text{स्पज्या}^{-1} \frac{7+4\sqrt{2}}{17}$  अर्थात्  $36^\circ 40'$  कोण पर ।

३।  $2P$  बीच के बल की दिशा में ।

- ४।  $7P$ , तीसरे बल से कोण  $-1\frac{1}{2}$  अर्थात्  $33^{\circ}15'$  का कोण बनाते हुये ।
- ५।  $\sqrt{3}P$ , तीसरे बल से  $30^{\circ}$  का कोण बनाते हुये ।
- ६।  $12\ 31$ ,  $AB$  से स्पर्श  $-15$  अर्थात्  $78^{\circ}41'$  का कोण बनाते हुये ।
- ७।  $14\ 24$  पौ० भार ।
- ८।  $5$  पौ० भार, दूसरे बल की विपरीत दिशा में ।
- ९।  $\frac{1}{2}P(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ ,  $Q$  और  $R$  के बीच के कोण को समविभाजित करते हुये ।
- १०।  $10$  पौ० भार सम्मुख के तीरंविन्दु की ओर ।
- ११।  $\sqrt{125+68\sqrt{3}}$  पौ० भार, पहले बल से कोण स्पर्श  $-1\frac{64+19\sqrt{3}}{23}$ , अर्थात्  $15\ 58$  पौ० भार कोण  $76^{\circ}39'$  बनाते हुये ।
- १३।  $P \times 5.027$  अष्टभुज के सम्मुख शीर्ष की ओर ।
- १४।  $17.79$  पौ० भार नियत रेखा से  $66^{\circ}\ 29'$  का कोण बनाते हुये ।
- १५।  $9\ 40$  पौ० भार नियत रेखा से  $39^{\circ}\ 45'$  का कोण बनाते हुये ।
- १६।  $39\ 50$  पौ० भार नियत रेखा से  $111^{\circ}\ 46'$  का कोण बनाते हुये ।
- १७।  $42.5$  किलोग्राम भार,  $OA$  से  $30^{\circ}$  का कोण बनाते हुये ।

## उदाहरणमाला ६ (पृष्ठ ४७)

- १।  $\frac{W}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$  ;  $W(\sqrt{3}-1)$  ।
- २।  $2\frac{1}{2}$  और  $3\frac{1}{2}$  पौ० भार ।    ३।  $126$  और  $32$  पौ० भार ।
- ४।  $56$  और  $42$  पौ० भार ।    ५।  $48$  और  $36$  पौ० भार ।
- ६।  $4, 8$  और  $12$  पौ० भार ।    ७।  $W$  ।
- ८।  $120$  पौ० भार ।
- ९। डोरी ऊर्ध्वाधर से  $60^{\circ}$  का कोण बनाती है और दबाव  $W\sqrt{3}$  है ।
- १०।  $7\ 23$  पौ० भार ।    ११। भार बराबर है ।

- १२। 134 इंच। १३।  $2\frac{1}{2}$  और  $9\frac{3}{4}$  फी० भार।  
 १४। 14 फी० भार। १५। 6 फुट 5 इंच ; 2 फुट 4 इंच।  
 १६। प्रत्येक पिंड के भार के बराबर हैं।

१८।  $2P$  कोज्या  $\frac{\alpha}{2}$ , जहाँ पर  $\alpha$  लगाम के दोनों भागों के बीच का कोण है।

$$२०। \frac{1W}{2} \text{ व्युकोज्या } \frac{C}{2}। \quad २२। 1W; 1W\sqrt{2}।$$

### उदाहरणमाला ७ (पृष्ठ ५६)

- १। 429 फी० भार ; 1991 फी० भार।  
 २।  $1\frac{1}{2}$  और  $1\frac{3}{4}$  टन भार।  
 ३। 378 और 851 फी० भार। ४। 152 फी०।  
 ५। 34, 66, 367, 755, और 5 हन्डरवेड क्रम में।  
 ६। 160 फी० और 120 फी० भार ; 128 फी० और 72 फी० भार।  
 ७। 20 हन्डरवेड और 6 हन्डरवेड।  
 ८। 24484 और 56134 फी० भार।  
 ९। 273 और 93 टन भार।  
 १०। (१) 3,  $1\frac{1}{2}$  और 1 टन भार ; (२) 2,  $\frac{1}{2}$  और 1 टन भार।  
 ११। AC में 501 टन भार का दबाव और CD में 179 टन भार का खिंचाव।

### उदाहरणमाला ८ (पृष्ठ ६९)

- १। (१)  $R=11$ ,  $AC=7$  इंच ; (२)  $R=30$ ,  $AC=1$  फुट 7 इंच ; (३)  $R=10$ ,  $AC=1$  फुट 6 इंच।  
 २। (१)  $R=8$ ,  $AC=25$  इंच ; (२)  $R=8$ ,  $AC=-75$  इंच ;  
 (३)  $R=17$ ,  $AC=-19\frac{1}{2}$  इंच।  
 ३। (१)  $Q=9$ ,  $AB=8\frac{1}{2}$  इंच ; (२)  $P=2\frac{1}{2}$ ,  $R=13\frac{1}{2}$  ;  
 (३)  $Q=6\frac{1}{2}$ ,  $R=12\frac{1}{2}$ ।

- ४। (१)  $Q=25$ ,  $AB=3\frac{3}{8}$  इंच; (२)  $P=24\frac{1}{2}$ ,  $R=13\frac{1}{2}$  ;  
(३)  $Q=2\frac{1}{4}$ ,  $R=3\frac{3}{4}$  ।

- ५। 15 और 5 पौ० भार ।  
६।  $43\frac{1}{2}$  और  $13\frac{1}{2}$  पौ० भार । ८। 98 और 70 पौ० भार ।  
९। अधिक बलवान आदमी से गुटका 2 फुट दूर होना चाहिये ।  
१०। 4 फुट 3 इंच । ११। 1 पौ० भार । १२। 1 फुट ।  
१३। 20 पौ० ; 4 इंच ; 8 इंच । १४।  $14\frac{3}{8}$  इंच ;  $10\frac{5}{8}$  इंच ।  
१६। 40 और 35 पौ० भार । १७।  $\frac{1}{2}$  W ।  
१८। बल हाथ और कंधे की दूरी के व्युत्क्रम अनुपात में परिणमित होता है ।  
१९। (१) 100 और 150 पौ० भार , (२) 50 और 100 पौ० भार ; (३) 25 और 75 पौ० भार ।  
२०। 1 पौ० भार पहले से 5 फुट पर ।  
२१। 77.55 और 34.45 पौ० भार लगभग ।

## उदाहरणमाला ९ (पृष्ठ ८७)

- १। 101 । २।  $5\sqrt{3}$  फुट-पौ० ।  
३।  $75\sqrt{3}=129.9$  पौ० भार । ४। 6 पौ० भार से 3 फुट 8 इंच ।  
५। 20 पौ० भार से 66 फुट की दूरी पर ।  
६। सिरे से  $2\frac{5}{8}$  फुट । ७।  $2\frac{3}{4}$  पौ० । ८।  $2\frac{1}{4}$  पौ० ।  
९। (१) प्रत्येक 4 टन भार ; (२)  $4\frac{1}{2}$  टन भार,  $3\frac{3}{4}$  टन भार ।  
१०। B खंटी से 3 इंच है । ११।  $\frac{5}{8}$  हल्डरवेट ।  
१२। छड़ की लम्बाई की एक चौथाई । १३। 55 पौ० भार ।  
१४। भार  $3\frac{1}{2}$  पौ० है और बिन्दु 5 पौ० भार से  $8\frac{1}{2}$  इंच दूर है ।  
१५। 3 औंस । १६।  $85\frac{1}{2}$ ,  $85\frac{1}{2}$  और 29 पौ० भार ।  
१७। 96, 96 और 46 पौ० भार । १८। घुरी से  $1\frac{1}{2}\frac{7}{8}$  इंच ।  
१९।  $2\sqrt{2}$  पौ० भार,  $CD$  के समानान्तर,  $AD$  को  $P$  पर काटता हुआ,



जहाँ पर  $AP = \frac{1}{2} AD$  । २० ।  $2P, DC$  पर कार्य करता हुआ ।

२१ । परिणामीबल  $AC$  के समानान्तर हैं और  $AD$  को  $P$  पर काटना है, जहाँ पर  $AP = \frac{2}{3}$  फुट ।

२२ ।  $20\sqrt{5}$  पौ० भार,  $AB$  और  $AD$  को  $A$  में क्रमशः ८ फुट और १६ फुट की दूरी पर काटता हुआ ।

२३ ।  $P\sqrt{3}$ ,  $BC$  पर लम्ब हैं और उसे  $Q$  पर काटता है जहाँ पर  $BQ = \frac{1}{3} BC$  ।

२९ । दृष्ट ऊँचाई  $\frac{1}{2} l\sqrt{2}$  है, जहाँ पर  $l$  रस्सी की लम्बाई है ।

३१ । सरल रेखा जो दोनों बलों के बीच के बाह्य-कोण को ऐसे दो कोणों में विभाजित करती है जिनकी ज्याओं की व्युत्क्रम-निष्पत्ति बलों की निष्पत्ति के बराबर है ।

३३ । २२५ पौ० भार ।

### उदाहरणमाला १० (पृष्ठ ९७)

२ । ९ फुट-पौ० ।

३ । ६ ।

४ ।  $C$  पर कार्य करने वाले बल के बराबर, समानान्तर और विपरीत दिशा में  $AC$  के इस प्रकार के बिन्दु  $C'$  पर कि  $CC' = \frac{1}{2} AB$ , कार्य करता हुआ ।

### उदाहरणमाला ११ (पृष्ठ ११४)

२ ।  $45^\circ$  ।

३ ।  $10\sqrt{2}$  और १० पौ० भार ।

४ । डोरी की लम्बाई  $AC$  के बराबर है । ५ ।  $\frac{1}{3} IV\sqrt{3}$ ,  $\frac{1}{3} IV\sqrt{3}$  ।

८ ।  $\frac{a}{l} < 1$  और  $> \frac{1}{2}$  । १२ ।  $\frac{2}{3}\sqrt{5}$  और  $\frac{1}{3}\sqrt{5}$  पौ० भार ।

१४ ।  $IV$  व्युज्या  $a$  और  $IV$  कोसज्या  $a$  । १५ ।  $\frac{1}{3} IV\sqrt{3}$  ।

१६ ।  $30^\circ$ ;  $\frac{2}{3} IV\sqrt{3}$ ;  $\frac{1}{3} IV\sqrt{3}$  । १७ ।  $\sqrt{7}:2\sqrt{3}$  ।

१८ ।  $\frac{4}{9}\sqrt{3}$  पौ० भार । १९ ।  $6\frac{2}{3}$  पौ० भार ।

२१ ।  $h\sqrt{h^2 + a^2 \text{ज्या}^2 a} / (h + a \text{कोज्या} a)$ , जहाँ पर  $2a$  तम्बोर की ऊँचाई है ।

- २२। प्रतिबल  $\frac{b}{a+b} \frac{r}{\sqrt{r^2-ab}} W$  और  $\frac{a}{a+b} \frac{r}{\sqrt{r^2-ab}} W$  है।  
 २५। 3 16 फुट ; 133 और 118 8 पौ० भार।  
 २६। 15.5 पौ० भार। २७। 6.75 और 16 6 पौ० भार।  
 २८। 2.83 और 3 61 हन्डरवेट।  
 २९। 26.8 और 32.1 पौ० भार।

## उदाहरणमाला १२ (पृष्ठ १३३)

- १।  $\frac{1}{2} W \sqrt{3}$ । २।  $\frac{1}{2} W \sqrt{3}$ ।  
 ४।  $\frac{1}{2} W$  कोस्पज्या  $\alpha$ ;  $\frac{1}{2} W$  कोस्पज्या  $\alpha$ ।  
 ६।  $\frac{W \text{ ज्या } \beta}{\text{ज्या } (\alpha + \beta)}$ ;  $\frac{W \text{ ज्या } \alpha}{\text{ज्या } (\alpha + \beta)}$ ,  

$$\text{स्पज्या}^{-1} \left( \frac{\text{कोस्पज्या } \beta - \text{कोस्पज्या } \alpha}{2} \right),$$
  
 ८।  $\frac{1}{2}$  पौ० भार। ११।  $AC = a$ ; तनाव  $= 2W \sqrt{3}$ ।  
 १४। सिर्रे और आधार पर प्रतिबल क्रम से लगभग 3.24 और 4.8 औ० भार हैं।  
 १५।  $\frac{W r}{2 \sqrt{R^2 - r^2}}$ । १८।  $W \frac{a}{b}$ । २३।  $\frac{1}{2} W \sqrt{6}$ ।  
 २४। 133  $\frac{1}{2}$  और 166  $\frac{1}{2}$  पौ० भार। २६। 17  $\frac{1}{2}$  और 2  $\frac{1}{2}$  पौ० भार।  
 २७। 20 पौ० भार।

## उदाहरणमाला १३ (पृष्ठ १४२)

- १। बल  $4\sqrt{2}$  पौ० भार के बराबर हैं और तीसरे बल से  $45^\circ$  का कोण बनाना हैं, और बलयुग्म का घूर्ण  $10a$  हैं जहाँ  $a$  वर्ग की भुजा है।  
 २। बल  $5P\sqrt{2}$  के बराबर हैं और  $DB$  के समानान्तर हैं, और बलयुग्म का घूर्ण  $3Pa$  हैं, जहाँ  $a$  वर्ग की भुजा है।

३। बल 6 पौ० भार के बराबर है और  $CB$  के समानान्तर है, और बलयुग्म का घूर्ण  $\frac{21\sqrt{3}a}{2}$  है, जहाँ  $a$  पट्भुज की भुजा है।

### उदाहरणमाला १४ (पृष्ठ १४७)

१। भुजा क्षैतिज से कोण स्पष्ट्या  $-12$  बनाती है। २।  $15a$ ।

३।  $(n+2)\sqrt{b^2+c^2}$ । ४। एक भार जो भेज के भार के बराबर है। ६। 10 पौ०।

७। केन्द्र को उस पाये से मिलाने वाली रेखा पर जो टूटे हुये पाये के सम्मुख है, और केन्द्र से वर्ग के विकर्ण की एक तिहाई दूरी पर।

८। 120 पौ०। ९। ज्या  $-1 \frac{p}{p+w}$ ।

११।  $A$  पर दबाव  $W \frac{\text{कोज्या } A}{2 \text{ ज्या } B \text{ ज्या } C}$  है।

### उदाहरणमाला १५ (पृष्ठ १५९)

१।  $1\frac{1}{2}$ ,  $1\frac{1}{2}$  और  $1\frac{1}{2}$  फुट। २। 2,  $2\frac{1}{2}$  और  $1\frac{1}{2}$  फुट।

३।  $2\sqrt{5}$ , 3 और 3 इंच। ६। त्रिभुज के बिन्दु  $A$  पर दबाव

$\frac{w}{3} + W \frac{a}{\text{ज्या } \beta}$  है, जहाँ पर  $a$  भार  $W$  की  $BC$  भुजा से लम्ब दूरी है।

१०।  $60^\circ$ ।

१२। कोज्या  $-1 \frac{1}{2}$  अर्थात्  $73^\circ 44'$ ।

### उदाहरणमाला १६ (पृष्ठ १६३)

१। मिरे से  $4\frac{1}{2}$  इंच। २। मिरे से 15 इंच।

३।  $2\frac{5}{8}$  फुट। ४। बीच में  $2\frac{1}{2}$  इंच।

५। पहले कणसे  $7\frac{1}{2}$  इंच। ६। दोनों किनारे के भारों के बीच की दूरी को 7:2 की निष्पत्ति में विभाजित करता है। ७। 5:1।

८।  $1.335...$  फुट।

९।  $\frac{2n}{3}$  इंच। १०। 12 गो० ; दंड का मध्य-बिन्दु।

उदाहरणमाला १७ (पृष्ठ १६९)

१। वर्ग की भुजा का पाँचवा भाग। २।  $AB$  से  $\frac{3a}{4}$  ;  $AD$  से  $\frac{a}{4}$ ।

३। उस बिन्दु पर जिसकी  $AB$  और  $AD$  से दूरियाँ, क्रमशः 16 और 5 इंच हैं। ४।  $7\frac{1}{2}$  और  $8\frac{1}{2}$  इंच।

५।  $\frac{a}{6}\sqrt{19}$  ;  $\frac{a}{30}\sqrt{283}$ । ७। पटल के गुरुत्व-केन्द्र पर।

८।  $8\frac{1}{2}$  और  $11\frac{1}{2}$  इंच। १०। 2:1:1

१२। उस बिन्दु पर जिसकी  $BC$  और  $CA$  से दूरियाँ क्रमशः इन रेखाओं से  $A$  और  $B$  की दूरियों की  $\frac{1}{3}$  वें और  $\frac{1}{3}$  वें पर हैं।

१४। वह केन्द्र से पाँचवें भार को मिलाने वाली रेखा को 5:9 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१८। वर्ग की भुजा का चौथाई। २०।  $A$  से  $4\frac{1}{2}$  इंच।

२१। वह अन्तः वृत्त के केन्द्र से जाता है।

उदाहरणमाला १८ (पृष्ठ १७५)

१। जोड़ से  $2\frac{1}{2}$  इंच। २। चित्र के नीचे के सिरे से  $5\frac{1}{2}$  इंच।

३। वह छड़ को 5:11 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

४। त्रिभुज के आधार के केन्द्र पर। ५।  $7\frac{1}{2}$  इंच।

७। बड़े गोले के केन्द्र से एक इंच। ८। उसकी दूरी समा-

न्तरचतुर्भुज के केन्द्र से भुजा के नवें भाग के बराबर है।

९। केन्द्र से दूरी विकर्ण के बारहवें भाग के बराबर है।

१०। केन्द्र से दूरी वर्ग के विकर्ण के  $\frac{1}{2}$  वें भाग के बराबर है।

११। वह सम्मुख की समानान्तर भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को 5:7 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१२।  $O$  से  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$  इंच।

१४।  $\frac{5a}{18}$

१५।  $A'$ ,  $AD$  को समविभाजित करता है, जहाँ पर  $D$ ,  $BC$  का मध्य-बिन्दु है।

१६। वह  $GA$  को  $\sqrt{m-1}:m\sqrt{m-3}\sqrt{m+1}$  की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१७। त्रिभुज की ऊँचाई वर्ग की भुजा को  $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$  अर्थात्  $\cdot 634$  है।

१८। केन्द्र से  $\frac{1}{19}\frac{b^2}{a}$  इंच। १९। सूराल का केन्द्र मंडल के केन्द्र से 16 इंच होना चाहिये।

२०। बड़े गोले के केन्द्र से  $\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}$  इ।

२१।  $\frac{4}{3}h$ , जहाँ पर  $h$  शंकु की ऊँचाई है। २२। 13532 इंच।

२३। खोखला किये हुये भाग की ऊँचाई  $x$ , शंकु की ऊँचाई की एक तिहाई है। २४। 3080 मील लगभग।

### उदाहरणमाला १९ (पृष्ठ १८०)

१। क्रमशः 7, 8 और 9 वर्गों भारों से। २।  $1\frac{7}{6}$  इंच।

६। 5:4। १०। त्रिभुज के गुरुत्व-केन्द्र पर।

१४।  $2\sqrt{3}$ । १५।  $\sqrt{6}:1$ ।

१६। शंकु की ऊँचाई और बेलन की ऊँचाई में  $2-\sqrt{2}:1$  अर्थात् 5858:1 की निष्पत्ति होनी चाहिये।

१९। वह मौलिक शंकु के अक्ष को 3:5 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

### उदाहरणमाला २० (पृष्ठ १९६)

१।  $6\frac{1}{2}$  इंच। २।  $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$  इंच। ४।  $\frac{11'}{6}$ ।

७। 120;  $1\frac{1}{2}$  वर्ग। ८। 18, यदि वे अपनी लम्बाइयों की

दिशा में एक दूसरे के ऊपर होते हैं और 8, यदि वे अपनी चौड़ाइयों की दिशा में एक दूसरे के ऊपर होते हैं।

११। अर्द्ध-गोले की त्रिज्या का  $\sqrt{3}$  गुना।

१२।  $1:\sqrt{2}$ ।

१४।  $4r$ ।

१८। डोरी घरातल से कोण कोज्या<sup>-1</sup>  $\left(\frac{W \text{ ज्या } \alpha}{P}\right)$  बनाती है जहाँ

उसका क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  है ; संस्थिति स्थाई है।

१९। नियत बिन्दु से केन्द्र को मिलाने वाली रेखा ऊर्ध्वाधर में कोण

ज्या<sup>-1</sup>  $\left[\frac{W-w}{p+11'+w} \frac{r}{c}\right]$  बनाती है ; संस्थिति स्थायी है।

### उदाहरणमाला २१ (पृष्ठ २०६)

१। (१) 168 $\frac{1}{2}$  फुट-टन; (२) 117 $\frac{1}{2}$  फुट-टन।

२। 1000 फुट। ३।  $6 \times 10^7$  फुट-पौ०। ४। 21120।

५। 9 $\frac{3}{4}$  घण्टे। ६। 8 $\frac{1}{2}$ । ७। 71 $\frac{1}{2}$  मिनट।

९। 44352। १०। 660,000 फुट-पौ०, 30 अश्व-सामर्थ्य।

११। 111 $\frac{1}{2}$  टन भार। १३। 176 फुट-पौ०; 213 अश्व-सामर्थ्य।

२४। 24 2...फुट-पौ० ;  $\frac{1}{11}n(n+1)$  फुट-पौ०।

१६। 3 फुट-पौ०। १८। 166 फुट-पौ०।

### उदाहरणमाला २२ (पृष्ठ २१७)

१। 5 फुट। २। पहले भार से 4 फुट ; पहले भार की ओर।

३। 11:9। ४। 2 पौ०। ६। 4 पौ०।

७। 9 $\frac{1}{2}$  पौ०। ८। 27 औ० से 6 इंच ; 1 $\frac{1}{2}$  इंच।

९। 1 फुट। १०। 360 स्टोन भार। ११। 21 पौ० भार।

१२। 15 पौ० भार। १३।  $2\sqrt{2}$  लीवर में 45° के कोण पर।

१४। 50 पौ० भार। १५। बड़ी भुजा क्षैतिज से कोण

स्पष्टता  $\frac{7}{\sqrt{3}}$  बनाती है। १६।  $8\frac{1}{2}$  पौ० भार। १९। 20 पौ०।

२०।  $2\frac{1}{2}$  हन्डरेट का भार। २१।  $\frac{n}{6}(\sqrt{3}-1)^n$ ।

### उदाहरणमाला २३ (पृष्ठ २२६)

- १। (१) 320; (२) 7; (३) 3।  
 २। (१) 7; (२)  $45\frac{1}{2}$ ; (३) 7; (४) 6।  
 ३। 390 पौ०। ४।  $10\frac{3}{4}$  पौ०। ५। 5 पौ०।  
 ६। 5 पौ०। ९। 49 पौ०; प्रत्येक का भार 1 पौ०।  
 १०।  $4w$ ;  $21w$ । १२।  $9\frac{1}{4}$  पौ० भार। १३। 18 पौ० भार।

### उदाहरणमाला २४ (पृष्ठ २३०)

- १। 6 पौ०। २। 4 डोरियाँ; 2 पौ०।  
 ३। 47 पौ०; 6 घिरनियाँ। ४। 7 डोरियाँ; 14 पौ०।  
 ५।  $\frac{IV}{n+1}$ , जहाँ डोरियों की संख्या  $n$  है;  $\frac{IV}{n-1}$ ।  
 ६। 11 स्टोन भार। ७। रस्ती  $2\frac{1}{2}$  टन सम्हाल सकेगी।  
 ८।  $n$ । ९। 75 पौ०;  $166\frac{2}{3}$  पौ०। १०।  $1\frac{3}{4}$  हन्डरेट।

### उदाहरणमाला २५ (पृष्ठ २३६)

- १। (१) 30 पौ०; (२) 4 पौ०; (३) 4।  
 २। (१) 161 पौ० भार; (२) 16 पौ० भार; (३)  $\frac{1}{2}$  पौ०; (४) 5।  
 ३। 10 पौ० भार; भार पहली दो डोरियों के बीच की दूरी को  
 23:5 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।  
 ४। सिरे से  $\frac{1}{2}$  इंच। ५।  $18\frac{6}{11}$ । ६। सिरे से  $\frac{4}{5}$  इंच।  
 ८।  $IV = 7P + 4w$ ; 8 औ०; 1 पौ० भार। ९। 4; 1050 पौ०।  
 १०। 4। १२।  $IV = P(2^n - 1) + IV'(2^{n-1} - 1)$ ।

## उदाहरणमाला २६ (पृष्ठ २४४)

- १। 12 पौ० भार; 20 पौ० भार। २।  $30^\circ; W \frac{\sqrt{3}}{2}$ ।  
 ३। 103 92 पौ० भार। ५। 3:4;  $2P$ ।  
 ६।  $\sqrt{3}:1$ । ७। कोज्या<sup>-1</sup>  $\frac{1}{2}$ ; घरातल से ज्या<sup>-1</sup>  $\frac{1}{4}$ ।  
 ८।  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  पौ० भार;  $\frac{7}{\sqrt{3}}$  पौ० भार। ९। 6 पौ० भार।  
 ११।  $16\frac{1}{2}$  पौ०। १२।  $\frac{\text{ज्या } \alpha}{\text{ज्या } \beta - \text{ज्या } \alpha}$  टन।  
 १४। बिन्दु डोरी को 1: ज्या  $\alpha$  की निष्पत्ति में विभाजित करता है।  
 १६। 17 374 पौ० भार, 46 884 पौ० भार।  
 १७। 10 318 पौ० भार; 12 208 पौ० भार।  
 १८। 16 12 पौ० भार; 34 056 पौ० भार।

## उदाहरणमाला २७ (पृष्ठ २५२)

- १। 7 पौ० भार। २। 120 पौ० भार; प्रत्येक पर 70 पौ० भार;  $110\frac{1}{2}$  पौ० भार।  
 ३। 20 इंच। ४। 7 फुट। ५।  $3\frac{1}{2}$  टन।  
 ६। 3 पौ० भार। ७। 55 पौ०। ८।  $23\frac{1}{2}$  पौ० भार।  
 ९।  $2\frac{1}{2}$  पौ० भार। १०। 360 पौ०। ११। 120 पौ०।  
 १२। 1500 फुट पौ०। १३। 47040 फुट-पौ०; 2 हज़ारवेट;  
 210 फुट। १४।  $\frac{2b}{c-a}; \frac{3R}{R-r}$ ।

## उदाहरणमाला २८ (पृष्ठ २६२)

- १। 11 पौ०। २।  $26\frac{1}{2}$  पौ०। ३। 2 औ०।  
 ४। 2:3; 6 पौ०। ५। 24 494 पौ०। ६।  $5:\sqrt{26}$ ।  
 ७।  $\frac{1}{2}\sqrt{110}$  इंच;  $\sqrt{110}$  पौ०। ९। 2 शि० 3 पौ०; 1 शि० 9  $\frac{1}{2}$  पौ०।



१०। उसको एक शिल्लिंग का घाटा रहेगा। १२।  $10 : \sqrt{101} ; \sqrt{101} : 10$ ।

१३।  $\frac{P-Q}{2} ; \frac{P+Q}{2}$ । १४।  $w-P : P-w' ; \frac{ww'-P^2}{P-w'}$ ।

१५।  $P - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ । १६। 16 पौ०।

### उदाहरणमाला २९ (पृष्ठ २६९)

१। आलम्ब से 34 $\frac{1}{2}$  इंच। २। सिरे से 2 इंच; 1 इंच।

३। आलम्ब से 32 इंच। ४।  $\frac{1}{2}$  इंच; 4 $\frac{1}{2}$  पौ०।

५। 4 इंच। ६। 16 पौ०; भार के लटकने के बिन्दु से 8 इंच दूर।

७।  $\frac{1}{2}$  पौ०;  $\frac{1}{4}$  पौ०। ८। 26 पौ०; 15 पौ०; आलम्ब से 10 इंच।

९। 3 पौ०। १०। 15 $\frac{1}{2}$  पौ०; 6 $\frac{1}{2}$  पौ०; 4 इंच।

११। यह उस बिन्दु से 10 इंच दूर है जहाँ भार लगा हुआ है।

१२। 3 औ०। १३। 30 इंच।

१५। क्योंकि मशीन पौण्डों को सूचित करने के लिये अंशांकित है, इसलिये जो भार वह बतलाती है, उनमें से प्रत्येक को एक पौण्ड का  $\frac{1}{10}$  भाग बढ़ा देना चाहिये।

१६। मशीन पर अंशांकित प्रत्येक अंक को  $\frac{x \cdot IV}{y \cdot 10}$  बढ़ा देना चाहिये,

जहाँ  $x$  और  $y$  मशीन के गुरुत्व-केन्द्र और सिरे की आलम्ब से दूरियाँ हैं, और  $IV$  मशीन का भार है।

१७। वह अपने ग्राहक को धोसा देता है यदि वह मरकने वाले भार को घटाता है और स्वयं धोसा खाता है यदि वह मरकने वाले भार को बढ़ाता है।

### उदाहरणमाला ३० (पृष्ठ २७८)

(निम्नलिखित उदाहरणों में  $x$  का मान २ $\frac{1}{2}$  लिया गया है।)

१। 4400 पौ०। २। 5 $\frac{1}{2}$  इंच। ३।  $\frac{1}{2}$  पौ० भार।

४। 1 $\frac{1}{2}$  पौ० भार। ५। 4 $\frac{1}{2}$  पौ० भार। ६। 13 $\frac{1}{2}$  टन भार।

- ७।  $6\frac{2}{3}$  टन भार। ८।  $50\frac{1}{2}$  फी० भार। ९।  $4\frac{1}{2}$  इंच।  
१०।  $4525\frac{1}{2}$ । ११।  $5430\frac{1}{2}$ । १२।  $4\frac{1}{2}$  फुट-फी०।

उदाहरणमाला ३१ (पृष्ठ २९४)

१। 10 फी० भार;  $12\frac{1}{2}$  फी० भार, क्रमशः  $10\sqrt{17}$  और  $12\frac{1}{2}\sqrt{17}$  फी० भार क्षैतिज से कोण स्पष्ट्या-<sup>14</sup> बनाते हुये।

$$२। \frac{P}{W} = \frac{\sqrt{2}}{3} = .4714.$$

३।  $10\sqrt{10}$  फी० भार क्षैतिज से कोण स्पष्ट्या-<sup>13</sup> बनाते हुये।

$$६। \frac{1}{2}। \quad ७। \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ फी० भार।} \quad ९। \frac{\sqrt{3}}{15}।$$

१०। ज्या  $\beta =$  ज्या  $\alpha + \mu$  कोज्या  $\alpha$ ।

११। स्पष्ट्या-<sup>1</sup>  $\left( \mu \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2} \right)$ , जहाँ  $W_1$  और  $W_2$  भार हों।

१४।  $a \times .134$ । १५। घर्पण-कोण के बराबर कोण पर।

१६। 2.19 हण्डरवेट। १७। 79.7 फी० भार; 32.

उदाहरणमाला ३२ (पृष्ठ ३०९)

१। 3808 फुट-फी०। २। 7,392,000 फुट-फी०;  $7\frac{7}{8}$

अश्व-सामर्थ्य।

३। 23,040,000 फुट-फी०;  $5\frac{1}{2}$  अश्व-सामर्थ्य। ४। 7766.

६। 446. ७। .11, .34, और .47 लगभग।

८।  $a = 4.125$ ;  $b = .01125$ .

(निम्न चार प्रश्नों के उत्तर केवल लगभग हैं।)

९।  $a = 5.3$ ;  $b = .097$ .

१०।  $P = 7.3 + .236W$ ;

$$E = \frac{W}{36.5 + 1.18W}; M = \frac{7.3 + .236W}{W}$$

$$११। P=43+4.711'' ; II \text{ और } 88$$

$$१२। P=18.5+5.511'' ; .59 \text{ और } .79$$

### उदाहरणमाला ३३ (पृष्ठ ३१४)

$$१। 11\frac{1}{2} \text{ पी० भार।} \quad २। 45^\circ।$$

$$५। \text{ उस पर उसके मध्य-बिन्दु तक चढ़ा जा सकता है।}$$

$$८। 50 \text{ फुट, सीढ़ी के भार का चौथाई।}$$

$$९। w \frac{2\mu - \text{स्पज्या } \alpha}{\text{स्पज्या } \alpha - \mu} ; \text{ यदि स्पज्या } \alpha > 2\mu, \text{ तो भार, ऋण होगा,}$$

अर्थात् समतुलित रखने के लिये सीढ़ी को ऊपर की ओर खींचना पड़ेगा; यदि स्पज्या  $\alpha < \mu$ , तो भी भार ऋण होगा, और समतुलित अवस्था सीमान्त होगी यदि सीढ़ी ऊपर की ओर खींच ली जाय और इस अवस्था में उसके पाँच एक दूसरे की ओर फिसलने की सीमा पर होंगे।

### उदाहरणमाला ३४ (पृष्ठ ३१८)

$$१। \text{स्पज्या } -1\frac{1}{2} ; \text{ ऊँचाई} = \text{व्यास का दुगुना।} \quad ४। 45^\circ।$$

$$६। 2 \text{ स्पज्या } -1 \frac{\sqrt{3}}{12} = 2 \text{ स्पज्या } -1 (.1443) = 16^\circ 26'। ८। \text{इकाई।}$$

### उदाहरणमाला ३५ (पृष्ठ ३२४)

$$११। \frac{\sqrt{3}}{30} = .0577. \quad \therefore \mu \left( \frac{11'}{w} + 1 \right) \sqrt{b^2 - a^2}। \quad १८। 3।$$

$$२०। \text{इष्ट बल } 211' \text{ के बराबर है और महत्तम ढाल-रेखा से कोण कोज्या }^{-1} \frac{1}{2} \text{ बनाता है।}$$

$$२१। \text{महत्तम ढाल-रेखा से कोज्या }^{-1} \frac{5\sqrt{3}}{9} (=15^\circ 48') \text{ के कोण पर।}$$

$$२४। \text{यदि } \mu \text{ कोस्पज्या } \alpha \text{ इकाई से बड़ी हो, तो समतुलन की कोई}$$

सीमान्त अवस्था नहीं हो सकती, अर्थात् कज किसी भी अवस्था में उहर सकता है।

२८।  $60^\circ$ ।

उदाहरणमाला ३६ (पृष्ठ ३३५)

१।  $P$  पर, जहाँ  $BP = \frac{1}{2}BC$ ;  $\frac{3W}{2}$ । ५।  $\frac{W}{2}$  स्पग्मा  $\frac{ACB}{2}$ ।

७।  $\frac{3W}{\sqrt{5}}$ ;  $\frac{W}{5}$   $\sqrt{10}$  क्षतिज से स्पग्मा  $-1\frac{1}{2}$  के कोण पर।

८।  $\frac{W}{2}$ ;  $\frac{3W}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{3}W}{4}$ । १०। बीच के दंड के आधे के बराबर।

१२। दंडों के कुल भार का  $\frac{1}{5}$  क्षतिज दिशा में कार्य करता हुआ।

उदाहरणमाला ३७ (पृष्ठ ३४४)

६।  $\frac{7}{8}$  फुट-पी०। ७।  $\frac{5}{8}$  फुट-पी०।

उदाहरणमाला ३८ (पृष्ठ ३५४)

१। ३९ पी० भार; २५.८ पी० भार क्षतिज से  $1^\circ 40'$  के कोण पर।

२। १५२.३ और २६७.९६ पी० भार। ३। ४१

४।  $124^\circ$ ;  $103^\circ$ ;  $133^\circ$ । ५। २६.९ पी० भार।

६। ७४ पी० भार; १२.७ पी० भार।

७। २.६ पी० भार का बल जो उस रेखा पर कार्य करता है जो बड़ाई हुई  $BC$  और  $AC$  को  $K$  और  $L$  बिन्दुओं में इस प्रकार मिलती है कि  $CK=19.25$  इंच, और  $CL=17.6$  इंच।

८। (१)  $1\frac{1}{2}$  फुट; (२)  $7\frac{1}{2}$  फुट  $AB$  की विपरीत दिशा में।

९। सिरे से ३.९ फुट। १०। ७.१५ पी० भार और ६.८५ पी० भार।

११। १५०, १५८.११५, और ५० पी० भार।

१३। प्रत्येक १० हण्डरवेट भार के बराबर है।

१४। ४६; ९१.२ और ५७.२ पी० भार।

१५। ५८.१, ६५.८, ३७.४, ३३.२, और २९ पी० भार क्रम से।

२०।  $T_1=13.05$ ;  $T_2=9.79$ ;  $T_3=3.26$ ;  $T_4=8.39$ ,  
 $T_5=5$  हण्डरवेट।  $T_4$  और  $T_5$  टाई हैं; शेष स्ट्रट्स।

२१।  $T_1=8.39$ ;  $T_2=11.98$ ;  $T_3=9.62$ ;  $T_2$  स्ट्रट है और  $T_1$   
 और  $T_3$  टाई हैं।

२२। 37.2, 47.5, और 43.1 हण्डरवेट।

२३। 6 टन और 2 टन, 5.77, 1.153, 1.155 और 3.464; इन अंतिम  
 चारों में से पहला, तीसरा और चौथा स्ट्रट हैं और दूसरा टाई है।

२४।  $AB, BC, CD, DA$  के तनाव क्रमसे 32.4, 36.4, 16.8 और  
 25.5 पौं० भार हैं,  $BD$  पर दबाव 36.7 पौंड भार है।

### सरल विविध उदाहरणमाला (पृष्ठ ३८१)

- १। 15 पौ० भार दूसरे बल से कोण स्पष्टता  $-1\frac{1}{2}$  बनाता हुआ।
- २। प्रत्येक अवयव बल 57.735. पौं० भार है। ३। 14.24 पौं० भार।
- ४। 50 और 86.6025... पौं० भार। ६। 3 फुट।
- ७। 2 ओं०।  $A$  से  $4\frac{1}{2}$  इंच। १०।  $7\frac{1}{2}$  इंच।
- १२। यह केन्द्र में सम्मुख की भुजा के मध्य-बिन्दु को मिलाने  
 वाली रेखा को 2:13 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।
- १३। पैनी के व्यास का  $\frac{1}{2}$ । १४। 8 और 12 पौं० भार।
- १५।  $9\frac{1}{2}$  पौं० भार। १६।  $IV=P$ ।
- १७। इष्ट बिन्दु दोनों सिरों की डोरियों के बीच की दूरी को 13:49  
 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।
- १८।  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$  पौं० भार। २०। 18 इंच; 4 इंच। २१। 26  $\frac{1}{2}$ ।
- २२।  $x^2$ । २३। वह पूरी लम्बाई चढ़ सकता है।
- २४।  $10\frac{2}{3}\frac{1}{2}$ ।

### कठिन विविध उदाहरणमाला (पृष्ठ ३८४)

- ५। अन्तः वृत्त का केन्द्र।
- ६।  $P, AD$  को  $1:\sqrt{3}$  की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१। बल समतुलित है। २१। ३ पौ० भार। २८।  $\frac{l}{2}$ ।

३१।  $W \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ , जहाँ  $a$  और  $b$  डबे की भुजाओं की लम्बाइयों हैं और  $AP=x$ ।

३९। दंड के मध्य-बिन्दु से  $\sqrt{c^2+a^2}-c$  की दूरी पर, जहाँ पर  $2c$  दंड की लम्बाई और  $a$  केन्द्र में दिये हुये बिन्दु की दूरी है।

४०।  $\frac{\mu_c W'}{a \cos \theta + \mu_c \sin \theta}$ , जहाँ पर  $W'$  प्रत्येक कण का भार है।

४४। क्षैतिज से घ्रातलों के झुकाव के कोणों के बीच का अन्तर परंपर-कोणों के योग से अधिक नहीं होना चाहिये।

४५।  $W$  कोज्या  $\lambda$  ज्या  $(\alpha-\gamma)$  व्युज्या  $\alpha$ , और  $W'$  कोज्या  $\lambda$  ज्या  $\lambda$  व्युज्या  $\alpha$ , जहाँ  $W$  दंड का भार है।

४८। पट्टी की गहराई की चौड़ाई से निष्पत्ति।

४९।  $\sqrt{3}$  फुट। ५३। कण पहले चलेगा यदि  $\mu W > (1+\mu^2) w$  कोज्या  $\alpha$  ज्या  $\alpha$ , जहाँ  $\alpha$  घ्रातल के फलन का झुकाव है।

५७। समतुलित अवस्था नष्ट हो जायगी।

५९।  $W$  स्पज्या  $i$ ;  $\frac{W}{W+W'}$ , स्पज्या  $i$ , जहाँ  $W'$  आनत तल का भार है।

६२।  $W=10\sqrt{3}$ ; बल = (१)  $5\sqrt{3}$  पौ० भार और (२) शून्य।  
 $W=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ; बल = (१)  $\frac{10}{\sqrt{3}}$  पौ० भार और (२) शून्य।

६५। जब  $B$  आपी से अधिक सीढ़ी उठा ले, तो उसे नीचे की ओर दवाना चाहिये।



